

**Рекомендации для системы образования Брянской области
по совершенствованию методики преподавания учебного
предмета «Математика» (профильный уровень)
в 2026-2027 учебном году**

Описание предметной подготовки участников ЕГЭ с минимальным уровнем подготовки, анализ типичных дефицитов в подготовке

○ **Описание достигнутых предметных результатов ФГОС: освоенных тем программы, сформированных умений и т.п. (если имеются)**

Из заданий базового уровня этой группой участников экзамена достаточно уверенно решено задание 4 (75,8%), что говорит о сформированности умений оперировать понятиями случайное событие, вероятность случайного события; умения вычислять вероятность события с помощью классического определения вероятности.

Задание 6 также решено достаточно успешно (63,6%), что говорит о сформированном умении решать простейшие показательные уравнения.

Некоторые успехи достигнуты участниками этой группы при решении задач повышенного уровня сложности. На уровне 21,2% успешности решено **задание 10**, благодаря достаточно сформированным умениям решать текстовые задачи на движение, составлять уравнение по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов.

15,2% участников этой группы успешно решили **задачу 11**, требовавшую умения выражать формулами зависимости между величинами, а именно – использовать свойства и график функции для получения ее формулы.

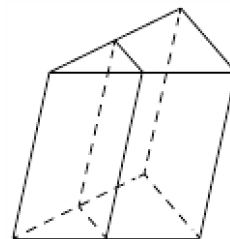
○ **Анализ типичных дефицитов в предметной подготовке: неосвоенные или слабо освоенные темы программы, несформированные или недостаточно сформированные умения, навыки, виды познавательной деятельности, проявляющиеся в типичных ошибках при выполнении соответствующих заданий**

Большинство задач базового и повышенного уровня решены участниками этой группы с успешностью менее 30%. Это говорит об определенных проблемах освоения школьного курса математики в целом.

Одним из самых проблемных заданий базового уровня сложности оказалось **задание 3** (12,1% успешных решений).

3

Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 24, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.



Задача требовала умения находить объем призмы, сравнивать объемы призм, площади их оснований. Четверть данных ответов оказались верными (ответ 6). Остальные ответы показывали неверное сравнение данного объема призмы и искомого объема. Вероятно, что предположения об их отличии в 2 раза, в 3 раза и т.п., делались интуитивно без опоры на формулы и без осознанного сравнения площадей основания призм.

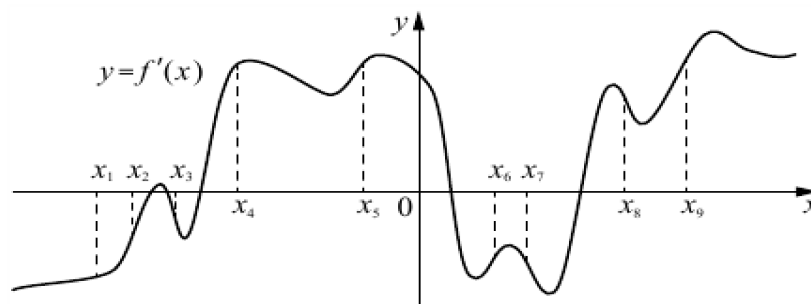
Сложности возникли у участников этой группы при решении **задания 7** (24,2% успешных решений).

7 Найдите значение выражения $\frac{14\sin 51^\circ \cdot \cos 51^\circ}{\sin 102^\circ}$.

Задача требовала умения вести преобразования тригонометрических выражений. Часть неправильных ответов получена по причине неверного применения формулы синуса двойного угла (забыт коэффициент 2), остальные, вероятнее всего, давались наугад.

Недостаточно успешно в этой группе решено **задание 8** базового уровня (24,2%).

- 8** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



Это говорит о слабой сформированности умений использовать производную для исследования функций, находить точки экстремума функций. Неправильные ответы были связаны с тем, что с графиком производной велись рассуждения, как с графиком функции (промежутками убывания считались промежутки «понижения» графика). Также в ответ записывалось не количество точек а их номера.

Указать (перечислить) темы программы и умения, которые в наименьшей степени сформированы, исходя из анализа выполнения заданий (столбец 2 Таблицы 15)

Таблица 1

№ п/п	Темы программы и умения	Класс(-ы) изучения в соответствии с ФОП ¹
1.	Стереометрия. Умения находить объем призмы, сравнивать объемы призм, площади их оснований	10 класс: 111.8.2.2; 11 класс: 111.8.3.1 5 класс: 146.4.2.4; 6 класс: 146.4.3.6; 7 класс: 146.6.2; 8 класс: 146.6.3; 9 класс: 146.6.4
2.	Тригонометрия. Умения вести преобразования тригонометрических выражений.	10 класс: 112.7.2.1 11 класс: 111.7.3.1; 111.7.3.2 5 класс: 146.4.2.2; 6 класс: 146.4.3.3; 7 класс: 146.5.2.1; 8 класс: 146.5.3.1; 9 класс: 146.5.4.1

¹ Здесь и далее: См. пункт 3 Спецификации КИМ ЕГЭ 2026 года по учебному предмету.

3.	Производная. Умения использовать производную для исследования функций, находить точки экстремума функций.	10 класс: 112.7.2.3; 112.7.2.4; 11 класс: 112.7.3.4 7 класс: 146.5.2.4; 8 класс: 146.5.3.4; 9 класс: 146.5.4.3
----	---	---

○ **Реалистичные «зоны роста» в части предметной подготовки для уверенного преодоления минимального балла ЕГЭ**

Наиболее актуальной можно считать задачу успешного решения большего количества задач базового уровня. Помимо указанных выше заданий, вполне реально улучшить результаты по заданию 2 на тему «Векторы».

Рекомендации для учителей по совершенствованию преподавания учебного предмета группе обучающихся с минимальным уровнем подготовки

Для улучшения результатов по заданию 3 полезно в ходе обучения решать больше модельных задач на комбинацию тел (вписанных, описанных), выявляя схожие параметры (в данной задаче – высота призм) и отличающиеся (площади оснований). Для сравнения параметров пространственных фигур полезно делать выносные чертежи, позволяющие применять знания планиметрии (в данной задаче – чертеж оснований призм). Необходимо также систематическое повторение терминологии, определений и формул темы «многогранники».

Для более успешного решения задания 7 в ходе обучения требуется целенаправленная работа по применению тригонометрических формул при преобразовании тригонометрических выражений. Для выражений с числовыми аргументами и аргументами в градусной мере полезны приемы сравнения аргументов с выводами о возможности применения формул (аргументы тригонометрических функций отличаются в два раза – можно применить формулы двойного аргумента и т.п.)

Для предупреждения ошибок в задании 8 целесообразно в ходе обучения и при подготовке к экзамену систематизировать и обобщать изучаемые теоремы о свойствах функции и первообразной, в том числе, с помощью графических иллюстраций. Полезно последовательно решать и сравнивать между собой задания открытого банка, в которых представлены графики функций и производных, подчеркивая различия в алгоритме решения.

Описание предметной подготовки участников ЕГЭ с низким уровнем подготовки, анализ типичных дефицитов в подготовке

○ Описание достигнутых предметных результатов ФГОС: освоенных тем программы, сформированных умений и т.п. (если имеются)

Из заданий базового уровня этой группой участников экзамена уверенно решено **задание 4** (89,56%), что говорит о сформированности умений оперировать понятиями случайное событие, вероятность случайного события; умения вычислять вероятность события с помощью классического определения вероятности.

Задание 6 также решено достаточно успешно (94,0%), что говорит о сформированном умении решать простейшие показательные уравнения.

Некоторые успехи достигнуты участниками этой группы при решении задач повышенного уровня сложности.

Задание 5 успешно решили 70,7% участников этой группы, что говорит о сформированном умении применять формулы сложения и умножения вероятностей,

На уровне 21,2% успешности решено **задание 10**, благодаря достаточно сформированным умениям решать текстовые задачи на движение, составлять уравнение по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов.

15,2% участников этой группы успешно решили **задачу 11**, требовавшую умения выражать формулами зависимости между величинами, а именно – использовать свойства и график функции для получения ее формулы.

В целом, все тестовые задания повышенного уровня сложности решили успешно более чем 50% участников этой группы.

○ Анализ типичных дефицитов в предметной подготовке: неосвоенные или слабо освоенные темы программы, несформированные или недостаточно сформированные умения, навыки, виды познавательной деятельности, проявляющиеся в типичных ошибках при выполнении соответствующих заданий

Из заданий базового уровня наибольшие затруднения у участников этой группы вызвало **задание 8**, 41,3% успешных решений. что говорит о проблемах в сформированности умений использовать производную для исследования функций, находить точки экстремума функций. В основном неправильные ответы были связаны с тем, что с графиком производной велись рассуждения, как с графиком функции (промежутками убывания считались промежутки «понижения» графика).

Все задания повышенного и высокого уровня сложности вызвали затруднения у участников экзамена из этой группы.

Задание 13 решено в этой группе с успешностью 2,5%. Задание требовало умения решать тригонометрические уравнения, причем, в отличие от заданий прошлых лет, уравнение сводилось к однородному тригонометрическому.

13	а) Решите уравнение $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.
	б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-6\pi; -\frac{9\pi}{2}\right]$.

В ходе решения, после получения уравнения вида $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$ нередко сразу появлялся ответ без обоснования. Это может говорить о решении «угадыванием», о незнании общих методов решения тригонометрических уравнений различных типов, о неумении по внешним признакам уравнения выбирать приемы решения.

Нередки ошибки при решении простейших тригонометрических уравнений вида $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$: неверно указываются значение угла, периодичность, избыточная запись двух дублирующих друг друга серий $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$ и $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$, что может говорить о недостаточном внимании к таким уравнениям в ходе обучения.

При отборе корней по тригонометрической окружности типичной ошибкой является неверное указание корней, принадлежащих заданной дуге, несоответствие записанных корней и их обозначений на окружности (или отсутствие обозначений), неверное или отсутствующее выделение дуги, соответствующей отрезку. При отборе корней методом перебора не рассматриваются значения параметра, при которых корень выходит за границы промежутка. При отборе с помощью неравенств самыми распространенными являются вычислительные ошибки. Следует отметить, что при верном решении пункта а) ошибки в отборе корней (и итоговая оценка 1 балл) встречается в этой группе участников достаточно часто – в $\frac{3}{4}$ всех работ, где это задание решено на положительный балл, отбор корней сделан неверно.

Для данной группы участников характерно большое количество некорректных записей, причина возникновения которых неясна, возможно, это невнимательность переписывания (предположительно, с черновика?). Отсутствует аргумент функции (записи типа $\sin - \cos$ вместо $\sin x - \cos x$); числовой коэффициент на месте аргумента: $\sin \sqrt{2} - \cos \sqrt{2}$, вместо $2 \sin x$ написано $2 - x$, недописанные фрагменты формул, длинные тексты, написанные словами, и т.д. При этом далее в решении возникает правильный ответ. Возникает ряд вопросов к тем условиям, в которых проводился экзамен: не повлияли ли отвлекающие факторы или нарушения в порядке проведения экзамена.

Задание 15 проверяет умение решать неравенства различных типов. В 2026 году предложено показательно-логарифмическое неравенство, содержащее одновременно и показательные, и логарифмические выражения. Участники экзамена данной группы приступали к решению этого задания, но успешно решали его только в 0,7% случаев.

15

 Решите неравенство $2^{\log_2(\log_2 x)} + \log_4^2 x - 3 \leq 0$.

При нахождении области допустимых значений неравенства, многие учли условие $x > 0$, но не поставили ограничение $\log_2 x > 0$, поскольку при применении основного логарифмического тождества на первых же шагах решения это выражение «исчезает» из неравенства. Это привело к неверному ответу.

При приведении логарифмов к одному основанию часто $\log_4^2 x$ преобразовывался в $\frac{1}{2} \log_2^2 x$ вместо $\frac{1}{4} \log_2^2 x$, то есть, не было верного понимания, что именно возводится в квадрат при такой записи.

Самым распространенным методом решения данного неравенства была замена переменной. Как и в предыдущие годы, в работах часто встречается нерациональный ход, при котором рациональное неравенство с новой переменной $\frac{1}{4}t^2 + t - 3 \leq 0$ не решается до конца (не получен промежуток значений новой переменной), а после получения нулей рациональной функции идет преждевременное возвращение к исходной переменной и применение метода интервалов к логарифмической функции. Этот прием сам по себе не является ошибочным, но затрудняет дальнейшее решение, приводит к потере времени.

Хаотичное оформление решения и отсутствие существенных этапов в некоторых работах свидетельствует о том, что шаги метода интервалов авторы этих работ знают нечетко, особенно при работе с нерациональной функцией. Если в работе вводилась новая переменная и рассматривалась рациональная функция относительно нее, часто наблюдалась путаница с областью определения: при применении метода интервалов рациональную функцию можно было рассматривать на всей числовой оси, а исходную логарифмическую – только на ее области определения ($1; +\infty$).

Задание 16 направлено на проверку умения строить и исследовать математические модели реальных ситуаций, в данном случае – выплаты кредита.

Участники экзамена данной группы приступали к решению этого задания, но успешно решали его только в 0,2% случаев.

16	В июле 2028 года планируется взять в банке кредит на четыре года в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы: — каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; — в июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 20 % меньше долга на июль предыдущего года; — к июлю 2032 года долг должен быть выплачен полностью. Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 47 712 тыс. рублей. Найдите S.
-----------	--

Основная ошибка – неправильно определялся долг перед банком по состоянию на июль (после выплаты платежа). В июле 2029, 2030 и 2031 годов долг должен быть на 20% меньше долга на июль предыдущего года. при этом участник экзамена пишет: долг уменьшается следующим образом $S; 0,8S; 0,6S; 0,4S; 0$. Причиной этого, на наш взгляд, является неправильная работа с процентами.

В задачах других вариантов, где уменьшение долга происходил на 25% другой возможной причиной данной ошибки может быть неверное определение типа погашения кредита: кредит на 4 года, долг уменьшается на 25%, значит долг уменьшается на одну и ту же величину. делается неверный вывод, что речь идет о дифференцированных платежах.

Другие ошибки, встречавшиеся в работах – неправильное вычисление числовых величин в платежах; выбор модели погашения кредита равными платежами.

К решению **задачи 14** и **задачи 17** участники из этой группы, как правило, не приступали, поэтому анализ типичных ошибок в этих заданиях будет проведен далее для других групп участников ЕГЭ.

№ п/п	Темы программы и умения	Класс(-ы) изучения в соответствии с ФОП ²
1.	Производная. Умения использовать производную для исследования функций, находить точки экстремума функций.	10 класс: 112.7.2.3; 112.7.2.4; 11 класс: 112.7.3.4 7 класс: 146.5.2.4; 8 класс: 146.5.3.4; 9 класс: 146.5.4.3
2	Тригонометрия. Умение решать тригонометрические уравнения.	10 класс: 112.7.2.2; 112.7.2.3; 11 класс: 112.7.3.2 5 класс: 146.4.2.3;

² Здесь и далее: См. пункт 3 Спецификации КИМ ЕГЭ 2026 года по учебному предмету.

		6 класс: 146.4.3.5; 7 класс: 146.5.2.3; 8 класс: 146.5.3.3; 9 класс: 146.5.4.2
3	Неравенства. Умение решать неравенства различных типов	10 класс: 112.7.2.2; 11 класс: 112.7.3.2 7 класс: 146.5.2.3; 8 класс: 146.5.3.3; 9 класс: 146.5.4.2
4	Текстовые задачи. Математическое моделирование. Умение строить и исследовать математические модели реальных ситуаций, в том числе – экономических.	10 класс: 112.7.2.2; 11 класс: 112.7.3.2; 112.7.3.4 5 класс: 146.4.2.3; 6 класс: 146.4.3.5; 7 класс: 146.5.2.3; 8 класс: 146.5.3.3; 9 класс: 146.5.4.2

○ **Реалистичные «зоны роста» в части предметной подготовки для уверенного получения 60-70 т.б.**

Вполне возможно добиться уверенного решения всех тестовых задач, как базового, так и повышенного уровня сложности. Кроме того, участникам с таким уровнем подготовки вполне по силам решение алгебраических задач с записью решения.

Рекомендации для учителей по совершенствованию преподавания учебного предмета группе обучающихся с низким уровнем подготовки

Обучающиеся этой группы обладают системой знаний, которая позволяет им понимать содержание и область применения основных понятий, решать несложные задания по математике, сводящиеся к прямому применению алгоритма, способны применять знания и умения в простых практических ситуациях.

На основе анализа указанных выше проблем, для ликвидации дефицитов в освоении ФОП учениками с низким уровнем подготовки можно рекомендовать следующее.

1. Целесообразно в ходе обучения и при подготовке к экзамену систематизировать и обобщать изучаемые теоремы о свойствах функции и первообразной, в том числе, с помощью графических иллюстраций. Полезно последовательно решать и сравнивать между собой задания открытого банка, в которых представлены графики функций и производных, подчеркивая различия в алгоритме решения.

2. Необходима систематическая работа по обобщению методов решения тригонометрических уравнений различных типов, упражнения на распознавание стандартных типов уравнений (в том числе, однородных), на выбор метода решения на основе внешних признаков уравнения. Требуется уделять внимание всем типам простейших уравнений, не только относительно синуса и косинуса, запоминанию формул для их решения (при необходимости – подкрепляя графическими иллюстрациями). В ходе обучения следует требовать от учеников корректных записей и правильного их произнесения, во избежание появления записей вида $\sin - \cos$.

3. Учителю необходимо акцентировать внимание на требованиях, предъявляемых к различным способам отбора корней, ввиду отсутствия соответствующих алгоритмов во многих учебниках. В целом, подготовка к решению этого задания должна включать широкий спектр задач и не ограничиваться рассмотрением уравнений из вариантов ЕГЭ нескольких прошлых лет.

4. При обучении решению как уравнений, так и неравенств, следует уделять внимание работе с ОДЗ. Необходимо подчеркивать обязательность учета области допустимых значений переменной, однако выпускникам должны быть известны корректные способы оформления работы с ОДЗ: запись в виде отдельной системы условий, упрощение и решение ее; запись системы, включающей ОДЗ и исходное неравенство и решение ее с помощью равносильных переходов; рассмотрение в тексте решения условий существования всех функций и обоснованное их исследование.

5. Несмотря на то, что шаги метода интервалов в ряде учебников не выделены явно, учителю целесообразно сформулировать их для учеников, причем в наиболее общем виде (для работы не только с рациональными функциями). Следует также четко сформулировать правило чередования знаков рациональной функции, если ученики планируют использовать чередование.

6. Отдельной отработки требует замена переменной в неравенствах (после введения новой переменной следует решить до конца неравенство с ней и только затем, ориентируясь на множество значений новой переменной с помощью систем и совокупностей простейших неравенств найти множество значений исходной переменной).

7. При решении неравенств повышенной сложности эффективным приемом является опора на теоремы о равносильных преобразованиях уравнений и неравенств. В ходе обучения, на наш взгляд, стоит отказаться от интуитивных действий «отбросить», «не обращать внимание» по отношению к некоторому множителю, числителю, знаменателю дроби. Вместо этого следует применять равносильные преобразования умножения, деления обеих частей неравенства на выражение постоянного знака.

8. Подготовкой к решению экономических задач ЕГЭ может служить систематическое решение более простых задач на моделирование в курсе средней школы, в том числе постоянное напоминание старшеклассникам ранее изученных правил работы с процентами.

9. Для повышения успешности решения задач на кредиты и вклады можно рекомендовать решение задач с разнообразными условиями. Помимо моделирования стандартных схем с равномерным уменьшением долга и равными платежами, рассматривать ситуации с заданным произвольно уменьшением долга (например, с помощью таблицы остатков долга или с помощью словесного описания) и заданным произвольно изменением платежей. Для упрощения суммирования величин полезно провести работу по распознаванию арифметических прогрессий и применению формулы суммы членов прогрессии. В случае, когда повышающий коэффициент представляет собой десятичную дробь с большим количеством цифр после запятой и требуется возводить его в высокие степени (например, $1,25^3$) следует порекомендовать школьникам перейти к работе с обыкновенными дробями для уменьшения трудоемкости вычислений.

Описание предметной подготовки участников ЕГЭ со средним уровнем подготовки, анализ типичных дефицитов в подготовке

○ Описание достигнутых предметных результатов ФГОС: освоенных тем программы, сформированных умений и т.п. (если имеются)

Задание 5 успешно решили 94,3% участников этой группы, что говорит о сформированном умении применять формулы сложения и умножения вероятностей,

Задание 9 верно решили 93,7% участников данной группы. Таким образом, достаточно хорошо сформировано умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов.

На уровне 93,8% успешности решено **задание 10**, благодаря достаточно сформированным умениям решать текстовые задачи на движение, составлять уравнение по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов.

97,4% участников этой группы успешно решили **задачу 11**, требовавшую умения выражать формулами зависимости между величинами, а именно – использовать свойства и график функции для получения ее формулы.

Задание 12, успешность решения которого составила 93,8% в данной группе, позволяет судить о достаточной сформированности умений находить производные элементарных функций; использовать производную для исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций.

Среди заданий 18 и 19 повышенного уровня сложности не было достаточно успешно решенных в этой группе участников.

○ Анализ типичных дефицитов в предметной подготовке: неосвоенные или слабо освоенные темы программы, несформированные или недостаточно сформированные умения, навыки, виды познавательной деятельности, проявляющиеся в типичных ошибках при выполнении соответствующих заданий

Одним из самых проблемных заданий базового уровня сложности в этой группе участников оказалось **задание 3** (85,3% успешных решений). Задача требовала умения находить объем призмы, сравнивать объемы призм, площади их оснований. Большинство данных ответов оказались верными (ответ 6). Остальные ответы показывали неверное сравнение данного объема призмы и искомого объема. Вероятно, что предположения об их отличии в 2 раза, в 3 раза и т.п., делались на основе неверного сравнения площадей оснований данных призм.

Недостаточно успешно в этой группе решено **задание 8** базового уровня (87,3%), что говорит о слабой сформированности умений использовать производную для исследования функций, находить точки экстремума функций. Неправильные ответы были связаны с тем, что с графиком производной велись рассуждения, как с графиком функции (промежутками убывания считались промежутки «понижения» графика).

Среди заданий повышенного уровня сложности наибольшие сложности в этой группе вызвали задания 15 и 16.

Задание 15 проверяет умение решать неравенства различных типов. В 2026 году предложено показательно-логарифмическое неравенство, содержащее одновременно и показательные, и логарифмические выражения. Участники экзамена данной группы успешно решали его только в 28,6% случаев.

Задание 16 направлено на проверку умения строить и исследовать математические модели реальных ситуаций, в данном случае – выплаты кредита. Участники экзамена данной группы успешно решали его только в 11,5% случаев.

Типичные ошибки при решении заданий 15 и 16 перечислены ранее при анализе уровня подготовки группы набравших от минимального до 60 т.б. В отличие от них, участники, набравшие от 61 до 80 т.б., успешно справлялись с большей частью этапов решения, но все же делали критическую ошибку на одном из этапов.

У участников ЕГЭ из этой группы трудности возникли с обеими геометрическими задачами повышенной сложности. К их решению экзаменуемые приступают, как правило, после решения алгебраических задач развернутой части экзамена. В связи с этим, на решение этих задач зачастую не хватает времени.

Кроме того, по сравнению с алгебраическими заданиями 13, 15, 16, в геометрических **задачах 14 и 17** в большей степени требуется изложение хода рассуждений в логическом порядке в словесной форме. В связи с этим нередко встречались доказательства, общая логика которых верна, но словесные формулировки, описывающие ее, некорректны (например, в конструкции «если..., то ...», «..., так как ...» менялись местами посылка и заключение).

В некоторых работах относительная простота геометрических конструкций и рассуждений привела к тому, что участники экзамена считали «очевидными» некоторые факты, тогда как следовало сделать ссылку на теорему, из которой они следуют. Авторы этих работ имели неверное представление о том, какое рассуждение в геометрии считается обоснованным.

- 14** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точки M и K — середины рёбер AB и SD соответственно.
- а) Докажите, что прямая MK параллельна плоскости SBC .
- б) Найдите высоту пирамиды, если $AB=12$, а угол между прямой MK и плоскостью основания пирамиды равен 60° .

В задании 14 часто встречалась проблема необоснованности построения угла между прямой MK и плоскостью основания пирамиды. Многие участники рассматривали перпендикуляр, опущенный из точки K на основание пирамиды и строили проекцию прямой MK на плоскость основания. Однако, точное положение основания этого перпендикуляра никак не обосновывалось (то, что оно лежит на диагонали основания).

Планиметрические рассуждения в пределах основания призмы (вычисление длин отрезков, доказательство равенства отрезков) часто оставались без обоснования. Авторы таких решений считали эти выводы «очевидными», «известными свойствами квадрата», следующими «из симметрии квадрата».

- 17** В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты $АН$ и $СТ$ к боковым сторонам BC и AB . Отрезки $НМ$ и $НК$ — перпендикуляры к прямым AB и AC соответственно. Отрезки $СТ$ и $МК$ пересекаются в точке E .
- а) Докажите, что $TH = ME$.
- б) Найдите длину отрезка EK , если $AB = 5$ и $AC = 6$.

В задании 17 возникали серьезные сложности с рассуждениями об углах, если экзаменуемый не использовал идею об окружностях, описанных около четырехугольников. Эту схему рассуждений можно считать достаточно стандартной, но экзаменуемые не замечали признаков того, что ее можно применить (наличие нескольких прямых углов, опирающихся на один отрезок). В целом к этому заданию приступали очень немногие участники из данной группы.

Успешное решение **задач 18 и 19** высокого уровня сложности встречается в этой группе экзаменуемых достаточно редко, продвижения в решении минимальны — в большинстве случаев на 1 б. из 4 б. В связи с этим, анализ типичных ошибок в решении этих задач будет дан ниже для группы набравших 81-100 т.б.

№ п/п	Темы программы и умения	Класс(-ы) изучения в соответствии с ФОП ³
1.	Стереометрия. Умения находить объем призмы, сравнивать объемы призм, площади их оснований	10 класс: 111.8.2.2; 11 класс: 111.8.3.1 5 класс: 146.4.2.4; 6 класс: 146.4.3.6; 7 класс: 146.6.2; 8 класс: 146.6.3; 9 класс: 146.6.4
2	Производная. Умения использовать производную для исследования функций, находить точки экстремума функций.	10 класс: 112.7.2.3; 112.7.2.4; 11 класс: 112.7.3.4 7 класс: 146.5.2.4; 8 класс: 146.5.3.4; 9 класс: 146.5.4.3
3	Неравенства. Умение решать неравенства различных типов	10 класс: 112.7.2.2; 11 класс: 112.7.3.2 7 класс: 146.5.2.3; 8 класс: 146.5.3.3; 9 класс: 146.5.4.2
4	Текстовые задачи. Математическое моделирование. Умение строить и исследовать математические модели реальных ситуаций, в том числе – экономических.	10 класс: 112.7.2.2; 11 класс: 112.7.3.2; 112.7.3.4 5 класс: 146.4.2.3; 6 класс: 146.4.3.5; 7 класс: 146.5.2.3; 8 класс: 146.5.3.3; 9 класс: 146.5.4.2
5	Стереометрия. Умение использовать геометрические отношения при решении задач; находить и вычислять геометрические величины, используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии.	10 класс: 112.8.2.2; 11 класс: 112.8.3.1 5 класс: 146.4.2.4; 6 класс: 146.4.3.6; 7 класс: 146.6.2; 8 класс: 146.6.3; 9 класс: 146.6.4
6	Планиметрия. Умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии, использовать геометрические отношения при решении задач; умение находить и вычислять геометрические величины, используя изученные формулы и методы	10 класс: 112.8.4; 11 класс: 112.8.5; 5 класс: 146.4.2.4; 6 класс: 146.4.3.6; 7 класс: 146.6.2; 8 класс: 146.6.3; 9 класс: 146.6.4

○ **Реалистичные «зоны роста» в части предметной подготовки для уверенного получения 80 и более т.б.**

Вполне достижимой является цель решения всех задач тестовой части без ошибок, а также максимально верного решения задач 13, 15, 16 развернутой части. Несмотря на длительно существующие проблемы с изучением планиметрии и стереометрии в школе следует стремиться к успешному выполнению задач 14 и 17, как минимум, их части а).

³ Здесь и далее: См. пункт 3 Спецификации КИМ ЕГЭ 2026 года по учебному предмету.

Рекомендации для учителей по совершенствованию преподавания учебного предмета группе обучающихся со средним уровнем подготовки

Обучающиеся этой группы обладают системой знаний, которая позволяет им понимать содержание и область применения основных понятий, решать достаточно сложные задания по математике, не сводящиеся к прямому применению алгоритма, ученики способны применять знания и умения в простых практических ситуациях.

В ходе работы с группой обучающихся со средним уровнем подготовки учителям необходимо соблюдать следующие рекомендации.

1. Для успешного решения задач на производную целесообразно в ходе обучения и при подготовке к экзамену систематизировать и обобщать изучаемые теоремы о свойствах функции и первообразной, в том числе, с помощью графических иллюстраций. Полезно последовательно решать и сравнивать между собой задания открытого банка, в которых представлены графики функций и производных, подчеркивая различия в алгоритме решения.

2. Для повышения успешности решения стереометрических задач полезно в ходе обучения решать больше модельных задач на комбинацию тел (вписанных, описанных), выявляя схожие параметры и отличающиеся. Для сравнения параметров пространственных фигур полезно делать выносные чертежи, позволяющие применять знания планиметрии. Необходимо также систематическое повторение терминологии, определений и формул темы «многогранники».

3. Можно рекомендовать в процессе обучения решать достаточное количество несложных опорных задач, отрабатывающих основные приемы построения сечений; доказательство геометрических фактов (параллельность, перпендикулярность и т.п.) с помощью основных теорем стереометрии «за несколько шагов»; построение углов и расстояний между прямыми и плоскостями.

4. После приобретения навыков таких действий можно рассматривать более сложные задачи, требующие комбинирования различных операций, анализа более сложных геометрических конструкций. Успешность такой работы требует систематического решения задач в процессе изучения стереометрии.

5. Для предупреждения указанных ранее затруднений следует при обучении уделить внимание обоснованию рассуждений со ссылками на теоремы планиметрии, профилактике логических ошибок в доказательствах (см. комментарии к заданию 19).

6. В целом, помимо систематического решения алгебраических и геометрических задач на доказательство и приобретения математических знаний и умений необходимо формировать метапредметные умения такие, как «развёрнуто и логично излагать свою точку зрения с использованием языковых средств; аргументированно вести диалог». Для этого ученикам требуются упражнения по изложению и обоснованию своих мыслей как в устной, так и в письменной форме.

7. Для улучшения результатов решения задач 15 и 16 в данной группе можно дать те же рекомендации, что и для группы набравших 27-60 т.б.

Описание предметной подготовки участников ЕГЭ с высоким уровнем подготовки, анализ типичных дефицитов в подготовке

○ Описание достигнутых предметных результатов ФГОС: освоенных тем программы, сформированных умений и т.п. (если имеются)

На уровне 97,8% успешности решено **задание 10**, благодаря достаточно сформированным умениям решать текстовые задачи на движение, составлять уравнение по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов.

100% участников этой группы успешно решили **задачу 11**, требовавшую умения выражать формулами зависимости между величинами, а именно – использовать свойства и график функции для получения ее формулы.

Задание 12, успешность решения которого составила 98,1% в данной группе, позволяет судить о достаточной сформированности умений находить производные элементарных функций; использовать производную для исследования функций, находить наибольшие и наименьшие значения функций.

Задание 13 решено в этой группе с успешностью 97,5%, что является хорошим показателем сформированности умения решать тригонометрические уравнения различных типов.

Их заданий высокого уровня сложности участниками этой группы достигнуты некоторые успехи в выполнении **задания 19**: 44,7% решили его на 1 первичный балл, 8,9% на 2 первичных балла. За **задание 18** 10,6% участников этой группы получили 1 первичный балл, 6,1% – 2 первичных балла. Это лучший результат относительно других групп участников, но можно заметить, что у большинства экзаменуемых продвижения в решении минимальны.

○ Анализ типичных дефицитов в предметной подготовке: неосвоенные или слабо освоенные темы программы, несформированные или недостаточно сформированные умения, навыки, виды познавательной деятельности, проявляющиеся в типичных ошибках при выполнении соответствующих заданий

Задание 18 требовало от участников экзамена умения применять к уравнению с параметром аналитические или графические приемы решения. С ним успешно справились 31,7% участников данной группы.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 - x)a^2 + (x^4 - x^3 - x + 1)a - x^3 + x^2 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Практически все способы решения требовали разложения на множители левой части исходного уравнения, что не всегда удавалось экзаменуемым, зачастую решение обрывалось на этом этапе, или разложение появлялось без всякого обоснования, что вызывает вопросы: каков был источник этих данных (черновик?) и почему участник не обосновал свои выводы.

После получения уравнения вида $(x-1)(xa^2 + (x^3-1)a - x^2) = 0$ второй множитель также разлагался на множители. Разложение методом группировки, как правило, ошибок не содержало. Однако, многими участниками это выражение распознавалось как квадратное относительно параметра a , делались попытки поиска его корней и использования формулы разложения на множители квадратного трехчлена. На этом пути зачастую не рассматривался случай $x = 0$, при котором выражение линейно относительно a и формулы корней квадратного трехчлена применять нельзя.

После получения уравнения вида $(x-1)(ax-1)(a+x^2)=0$ применялся либо аналитический, либо графический метод решения.

При решении аналитическим методом в уравнении $x^2 = -a$ участники теряли второе решение $x = -\sqrt{a}$, не учитывали условие $-a \geq 0$. Решая уравнение $ax-1=0$, получали $x = \frac{1}{a}$ без учета условия $a \neq 0$. В завершении решения не учитывалось возможное совпадения корней не только попарное, но и трех и более корней.

При решении графическим методом в решениях встречаются небрежно построенные графики, искажающие ситуацию, из которых невозможно получить верное решение.

Встречалось несоблюдение известных ключевых требований к графическому методу: аналитический расчет координат всех характерных точек графика, точек пересечения фигур, перебор всех возможных значений параметра с указанием количества решений уравнения в каждом случае.

На финальном этапе решения встречались случаи неверного подсчета количества общих точек графиков (довольно часто из внимания «выпадала» прямая $x=1$, хотя она и была изображена на чертеже).

В задании 19 успешность решения участниками данной группы составила 17,7%.

19

На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 3, а на карточках красного цвета написаны различные чётные числа (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше -72 .

Оказалось, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно удвоенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

а) Может ли на столе лежать ровно четыре карточки?

б) Может ли число красных карточек на столе быть на 60 больше числа синих карточек на столе?

в) Какое наибольшее количество карточек может лежать на столе?

Часть а) решалась с помощью подбора несложного примера, однако, и здесь многие участники не описали этот пример полностью: сообщали только максимальные числа на карточках, не указывая значения остальных.

В решении пунктов б) и в) самой распространенной ошибкой было рассмотрение только одной экстремальной ситуации. Верное начало в б) «пусть на столе S синих карточек и $S+60$ красных карточек, тогда, по условию наибольшее число на красной карточке равно $2S$ » заканчивалось неверным выводом «с учетом, что все числа больше -72 и числа на красных карточках четные, то чисел на красных карточках будет **ровно** $(2S+72)/2$ ». Верно было бы сказать, что количество чисел на красных карточках **меньше или равно** $(2S+72)/2$, поскольку **необязательно все** четные числа из промежутка $(-72; 2S]$ изображаются на карточках.

В результате этой логической ошибки вместо рассмотрения неравенств, дающих необходимую оценку величин в работе рассматривался ряд уравнений, описывающих одну из возможных ситуаций. Хотя эта ситуация и давала верный ответ (для п. в) – наибольшее количество карточек), но оставалось недоказанным, что другие ситуации не дадут еще большего количества карточек. Эксперты справедливо полагали, что в решении приведен пример, но отсутствует оценка, и п. в) не зачитывался.

Указать (перечислить) темы программы и умения, которые в наименьшей степени сформированы, исходя из анализа выполнения заданий (столбец 5 Таблицы 15)

№ п/п	Темы программы и умения	Класс(-ы) изучения в соответствии с ФОП ⁴
1.	Задачи с параметром. Умение решать уравнения, неравенства и системы с параметром; использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами	10 класс: 112.7.2.2; 112.7.2.3; 11 класс: 112.7.3.2; 112.7.3.3 6 класс: 146.4.3.5; 7 класс: 146.5.2.3; 8 класс: 146.5.3.3; 9 класс: 146.5.4.2
2	Алгебраические задачи на доказательство. Умение приводить примеры и контрпримеры, проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений; умение выбирать подходящий метод для решения задачи. Умение оперировать понятиями: множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел, остаток по модулю; умение использовать признаки делимости.	10 класс: 112.7.2.1; 112.7.2.2; 112.7.2.3; 112.7.2.4; 11 класс: 112.7.3.1; 112.7.3.2

○ **Реалистичные «зоны роста» в части предметной подготовки для получения 100 т.б.**

Для участников с таким уровнем подготовки вполне реальная задача – улучшить результаты решения геометрических задач 14 и 17, а также задач высокого уровня сложности 18 и 19, с помощью рекомендаций, приведенных далее.

Рекомендации для учителей по совершенствованию преподавания учебного предмета группе обучающихся с высоким уровнем подготовки

Обучающиеся этой группы способны решать комплексные задачи, интегрирующие знания из разных тем курса, владеют широким набором способов решения теоретических и практических заданий по математике.

По улучшению решения наименее успешно выполненным заданиям учениками данной группы можно дать следующие рекомендации.

1. Для улучшения результатов решения задач 14 и 17 в данной группе можно дать те же рекомендации, что и для группы набравших 61-80 т.б. (см. ранее).

2. Для преодоления указанных затруднений в задачах с параметром можно рекомендовать целенаправленное изучение основных приемов работы с квадратным трехчленом и его корнями, приемов оценки множества значений квадратичной функции.

3. Аналитическое решение уравнения с параметром вида «произведение равно нулю» вполне может быть алгоритмизировано, в этот алгоритм целесообразно включать учет ОДЗ и отрезка, которому должен принадлежать корень. Формальные равносильные преобразования полученной совокупности систем условий позволят учесть все требования, тогда как в ходе словесных рассуждений ученики могут какие-то условия упустить или неверно соединить логически.

4. Целесообразно обсудить с учениками требования к построению элементов чертежа при графическом методе решения (в том числе, аналитическое обоснование положения точек). Для определения положения фигур, зависящих от параметра, требуется повторить основные линейные преобразования графиков и методы преобразования

⁴ Здесь и далее: См. пункт 3 Спецификации КИМ ЕГЭ 2026 года по учебному предмету.

уравнений фигур. При получении ответа подчеркнуть важность систематического перебора всех возможных значений параметра с отбором значений, удовлетворяющих условию.

5. На наш взгляд, для предупреждения ошибок в задании 19 при работе с доказательством утверждений на уроках могут быть эффективны следующие приемы:

- четкое выделение структуры утверждения (дано..., требуется доказать...), метода доказательства (от противного, необходимость и достаточность, рассмотрение всех возможных случаев и т.п.);
- если рассуждение требует рассмотрения различных случаев, выделить все возможные ситуации в начале и обосновать, что других нет;
- на всех этапах рассуждения задавать вопрос: «Что считаем известным и почему?» (по условию, по доказанному, по известному из учебника утверждению и т.п.);
- акцентировать внимание на различии ситуаций «доказать, что утверждение справедливо в любом случае» (доказательство ведется в общем виде или перебором всех случаев, четко выделяя, какие случаи возможны) и «доказать, что утверждение может выполняться хотя бы в каком-то случае» (приводится конкретный пример);
- использовать для упражнений готовые доказательства «с ошибками» с целью выявления ошибок.

Рекомендации администрации ОО, ИПК / ИРО, иным организациям, реализующим программы профессионального развития учителей по совершенствованию преподавания учебного предмета

Рекомендуемые темы для обсуждения / обмена опытом на школьных методических объединениях учителей-предметников, в том числе по трансляции эффективных педагогических практик ОО со стабильно высокими результатами ЕГЭ

Представляется целесообразным рекомендовать для обсуждения на методических объединениях учителей-предметников следующие вопросы.

Блок 1. Трансляция опыта школ-лидеров и стажировочных площадок

- Система работы с одаренными детьми: опыт подготовки победителей и призеров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников; реализация индивидуальных образовательных траекторий (на примере МБОУ «Брянский городской лицей №2 им. М.В. Ломоносова»).

- Организация профильного обучения и ранней профориентации: модель взаимодействия «школа – вуз – предприятие» на базе региональных вузов для мотивации изучения математики.

- Алгоритмы подготовки высокобалльников: разбор системных мер следующих образовательных организаций: ГБОУ «Брянский городской лицей №1 имени А.С. Пушкина», МАОУ "Гимназия №1" г. Брянска, МБОУ Красногорская СОШ №1.

Блок 2. Методические дефициты выпускников

- Стереометрия и планиметрия высокого уровня сложности: типичные ошибки в заданиях №14 и №17 КИМ. Обоснование геометрических построений (угол между прямой и плоскостью), работа с выносными чертежами, применение тригонометрии в задачах на доказательство.

- Задачи с параметром (№18): аналитический и графический методы решения. Учет области допустимых значений, исследование количества корней в зависимости от параметра, потеря вырожденных случаев (например, когда квадратное уравнение становится линейным).

- Экономические задачи (№16): моделирование банковских процентов, кредитов и вкладов. Типичные вычислительные ошибки при работе с процентами и неверные математические модели погашения долга.

- Тригонометрия и логарифмические неравенства (№13, №15): отбор корней на тригонометрической окружности, решение однородных уравнений, корректная запись ОДЗ при применении метода интервалов к сложным функциям.

- Производная и первообразная (№8): чтение свойств функции по графику производной, различение графика функции и графика её производной, нахождение точек экстремума.

Блок 3. Совершенствование преподавания и метапредметные результаты

- Развитие регулятивных и коммуникативных УУД через предмет: обучение школьников развернутому и логичному изложению доказательств (устранение ошибок типа «очевидно, что...»), культуре использования математической символики и терминологии.

- Практико-ориентированные задания: интеграция реальных контекстов (агробизнес, экономика, управление личными финансами) в уроки алгебры и геометрии для формирования навыков математического моделирования.

- Дифференциация обучения: разработка индивидуальных образовательных маршрутов (ИОМ) на основе входной диагностики для групп обучающихся с разным уровнем предметной готовности.

Блок 4. Организационно-методическая поддержка учителя

-Реализация комплексного плана повышения качества математического и естественно-научного образования

- Эффективные форматы внутришкольного наставничества: каскадная модель передачи опыта от педагогов-стажеров школ-лидеров молодым специалистам через систему РУМО (регионального учебно-методического объединения).

- Использование ресурсов открытого банка заданий: методика систематического включения заданий-аналогов прошлых лет в текущий образовательный процесс без подмены его «натаскиванием».

Рекомендуемые ИПК / ИРО, иным организациям, реализующим программы профессионального развития учителей, направления повышения квалификации (в форме курсов, отдельных мероприятий, консультаций и т.п.) с учетом выявленных дефицитов предметной подготовки

1. Региональные методические семинары для учителей математики:

- ЕГЭ по математике: анализ ошибок и приемы эффективной подготовки

- Технология обучения решению задач высокого уровня сложности с развернутым ответом №14, 17–19 КИМ ЕГЭ (углубленное изучение методов координат в пространстве, векторно-координатного метода решения стереометрических задач, теории чисел и алгоритмов доказательства в планиметрии)

- Аналитическая геометрия и задачи с параметром в школьном курсе математики (графические и аналитические методы исследования уравнений и неравенств с параметрами)

- Методика преподавания тригонометрии и логарифмических неравенств (решение нестандартных трансцендентных уравнений, отработка алгоритмов отбора корней на тригонометрической окружности и работа с ОДЗ при применении метода интервалов к смешанным функциям)

- Прикладные аспекты преподавания математики: экономико-математическое моделирование (методика обучения решению текстовых задач №16: кредиты, вклады, оптимизация).

- Семинар-практикум «Дифференциация домашних заданий»: разработка карт индивидуальных образовательных маршрутов (ИОМ) для обучающихся групп риска (не преодолевших порог или набравших до 60 баллов) на основе результатов входной диагностики

- Организация участия учителей математики образовательных организаций Брянской области в вебинарах, проводимых издательствами «Экзамен», «Легион» и «Просвещение» на тему «Подготовка к ГИА по математике» (по согласованию с издательствами)

2. Организация работы стажировочных площадок на базе школ-лидеров: МАОУ «Гимназия №1» г. Брянска, МБОУ «Брянский городской лицей №2 им. М.В. Ломоносова», МБОУ Красногорская СОШ №1 для трансляции опыта работы профильных классов и методик подготовки высокобалльников.

3. Консультационные линии кафедры естественно-математического и цифрового образования ГАУ ДПО «БИПКО»: оперативная методическая поддержка муниципалитетов с низкими результатами (Дятьковский, Почепский районы, Стародубский муниципальный округ) по вопросам коррекции рабочих программ и календарно-тематического планирования, а также по вопросам работы школ в приграничных населенных пунктах.

4. В рамках курсов повышения квалификации по программе «Совершенствование профессиональной компетентности учителя математики в условиях реализации обновленных ФООП и ФГОС общего образования», (36 ч.) особое внимание уделить совершенствованию методики преподавания предмета: формированию навыков чтения графика производной, различению свойств функции и её производной; составлению

математических моделей по условию задачи, исследованию полученных решений на правдоподобность, работе с дробно-рациональными выражениями; систематизации знаний о преобразованиях графиков, чтению свойств функций по графику производной, связи алгебраических и графических интерпретаций; диагностике и коррекции метапредметных дефицитов школьников.