ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2022 года

МАТЕМАТИКА

Вы оцениваете математическую корректность решения математической задачи выпускника 9 класса в соответствии с критериями оценивания заданий с развернутым ответом

Тематическая принадлежность заданий ОГЭ

- №20 – упрощение алгебраических выражений,
  решение уравнений, их систем,
  решение неравенств,
- №21 – решение текстовой задачи,
- №22 – построение графика функции,
- №23 – задача на вычисление по геометрии,
- №24 – задача по геометрии на доказательство,
- №25 – геометрическая задача по геометрии
  высокого уровня сложности.

Задание 20. Пример 1. Решение 1/4

20 Решите неравенство $(x-7)^2<\sqrt{11}(x-7)$.

Решение.
Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-7)\left(x-7-\sqrt{11}\right)<0,$$

откуда $7<x<7+\sqrt{11}$.
Ответ: $(7;\,7+\sqrt{11})$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Вычислительная ошибка – ошибка, допущенная при выполнении арифметических действий:

сложении,

вычитании,

умножении,

делении

Задание 20. Пример 1. Решение 2/4

20 Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$; $(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$; $(x-7)\left(x-7-\sqrt{11}\right) < 0$,

Произведение двух множителей отрицательно, если множители разных знаков. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\begin{cases} x-7<0, \\ x-7-\sqrt{11}>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<7, \\ x>7+\sqrt{11}, \end{cases}$ решений нет.

Второй случай: $\begin{cases} x-7>0, \\ x-7-\sqrt{11}<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>7, \\ x<7+\sqrt{11}, \end{cases}$ $7<x<7+\sqrt{11}$.

Решение исходного неравенства: $7<x<7+\sqrt{11}$.

Ответ: $(7; 7+\sqrt{11})$.

Задание 20. Пример 1. Решение 3/4

20 Решите неравенство $(x-7)^2<\sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$(x-7)^2<\sqrt{11}(x-7)$; $x^2-\left(14+\sqrt{11}\right)x+49+7\sqrt{11}<0$.

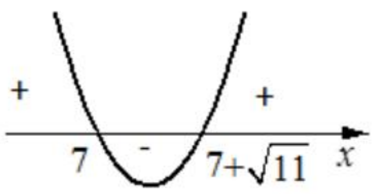
Рассмотрим функцию $y=x^2-\left(14+\sqrt{11}\right)x+49+7\sqrt{11}$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем нули функции: $x^2-\left(14+\sqrt{11}\right)x+49+7\sqrt{11}=0$;

$x=\dfrac{14+\sqrt{11}-\sqrt{11}}{2}$, $x=\dfrac{14+\sqrt{11}+\sqrt{11}}{2}$; $x=7$, $x=7+\sqrt{11}$.

Схематично изобразим параболу

$y=x^2-\left(14+\sqrt{11}\right)x+49+7\sqrt{11}$.



$y<0$ при $x\in(7;7+\sqrt{11})$

Ответ: $(7;7+\sqrt{11})$.

Задание 20. Пример 1. Решение 4

20 Решите неравенство $(x-7)^2<\sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$$(x-7)^2<\sqrt{11}(x-7)\Leftrightarrow (x-7)\left(x-7-\sqrt{11}\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-7<0,\\ x-7-\sqrt{11}>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-7>0,\\ x-7-\sqrt{11}<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<7,\\ x>7+\sqrt{11}\end{cases}\\ \begin{cases}x>7,\\ x<7+\sqrt{11}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 7<x<7+\sqrt{11}.$$

Ответ: $(7;\,7+\sqrt{11})$.

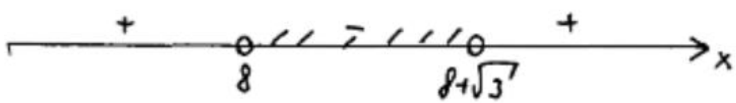
Задание 20. Пример 1. Работа 1

20

$(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$

$\cancel{(x-8)(x-8}$ $(x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$

$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$



$x \in (8, 8+\sqrt{3})$

Ответ $x \in (8, 8+\sqrt{3})$

20 Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0,$$

откуда $8 < x < 8+\sqrt{3}$.

Ответ: $(8; 8+\sqrt{3})$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

? баллов

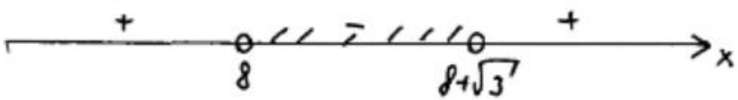
Задание 20. Пример 1. Работа 1

20

$(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$

~~(x-8)(x-8~~ $(x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$

$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$



$x \in (8, 8+\sqrt{3})$

Ответ $x \in (8, 8+\sqrt{3})$

20 Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right) < 0,$$

откуда $8 < x < 8+\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(8; 8+\sqrt{3}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

2 балла

Задание 20. Пример 1. Работа 2

20

$$(x-8)^2 < \sqrt{3}\cdot(x-8)$$

$$(x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$$

$$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+8<0 \\ x-8-\sqrt{3}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+8>0 \\ x-8-\sqrt{3}<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-8 \\ x>8+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x>-8 \\ x<8+\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x>-8 \\ x<8+\sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-8; 8+\sqrt{3})$

20 Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right) < 0,$$

откуда $8 < x < 8+\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(8; 8+\sqrt{3}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

? баллов

Задание 20. Пример 1. Работа 2

20

$(x-8)^2 < \sqrt{3}\cdot(x-8)$

$(x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$

$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+8 < 0 \\ x-8-\sqrt{3} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+8 > 0 \\ x-8-\sqrt{3} < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -8 \\ x > 8+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x > -8 \\ x < 8+\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x > -8 \\ x < 8+\sqrt{3} \end{cases}$

Ответ: $x \in (-8; 8+\sqrt{3})$

20 Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right) < 0,$$

откуда $8 < x < 8+\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(8; 8+\sqrt{3}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

1 балл

Задание 20. Пример 2. Решение 1/4

20 Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

Решение.
Исходное уравнение приводится к виду:
$$\left(x^2-2x+15\right)\left(x^2+2x-15\right)=0.$$
Уравнение $x^2-2x+15=0$ не имеет корней.
Уравнение $x^2+2x-15=0$ имеет корни -5 и 3.
Ответ: -5; 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 2. Решение 2/4

20 Решите уравнение $x^4 = (2x-15)^2$.

Решение.

$x^4 = (2x-15)^2$, $(x^2)^2 - (2x-15)^2 = 0$, $(x^2 - 2x + 15)(x^2 + 2x - 15) = 0$.

Произведение двух множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем: $x^2 - 2x + 15 = 0$ или $x^2 + 2x - 15 = 0$.

$x^2 - 2x + 15 = 0$, $x^2 - 2x + 1 + 14 = 0$, $(x-1)^2 = -14$ не имеет корней.

$x^2 + 2x - 15 = 0$, $x^2 + 2x + 1 - 16 = 0$, $(x+1)^2 - 4^2 = 0$, $(x+1-4)(x+1+4) = 0$, $(x-3)(x+5) = 0$

откуда $x - 3 = 0$ или $x + 5 = 0$; $x = 3$ или $x = -5$.

Ответ: -5; 3.

Задание 20. Пример 2. Решение 3/4

20 Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

Решение.

$x^4=(2x-15)^2$, откуда $x^2=-(2x-15)$ или $x^2=2x-15$, получаем:

$x^2+2x-15=0$ или $x^2-2x+15=0$.

$x^2-2x+15=0$, $D=4-60=-56<0$ – уравнение не имеет корней.

$x^2+2x-15=0$, $D=4+60=64$,

$x=\dfrac{-2-8}{2}$, $x=\dfrac{-2+8}{2}$; $x=-5$, $x=3$.

Ответ: -5; 3.

Задание 20. Пример 2. Решение 4

20 Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

Решение.

$$x^4=(2x-15)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2x-15 \\ x^2=-2x+15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2=-14 \\ (x+1)^2=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=4 \\ x+1=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-5;3\}$.

Задание 20. Пример 3. Решение 1/5

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Решение.

Пусть $t=(x-1)^2$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-2t-3=0,$$

откуда $t=-1$ или $t=3$.

Уравнение $(x-1)^2=-1$ не имеет корней.

Уравнение $(x-1)^2=3$ имеет корни $1-\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 3. Решение 2/5

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Решение.

Пусть $(x-1)^2=t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-2t-3=0, \text{ откуда } t=-1 \text{ или } t=3.$$

Уравнение $(x-1)^2=-1$ не имеет корней.

Уравнение $(x-1)^2=3$; $x-1=\sqrt{3}$ или $x-1=-\sqrt{3}$; $x=1+\sqrt{3}$ или $x=1-\sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Задание 20. Пример 3. Решение 3/5

20 Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Решение.

Пусть $(x-1)^2 = t$, $t \geq 0$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 2t - 3 = 0, \text{ откуда } t = -1 \text{ или } t = 3.$$

$t = -1$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$,

$t = 3$; $(x-1)^2 = 3$; $x - 1 = \sqrt{3}$ или $x - 1 = -\sqrt{3}$; $x = 1 + \sqrt{3}$ или $x = 1 - \sqrt{3}$.

Ответ: $1 - \sqrt{3}$; $1 + \sqrt{3}$.

Задание 20. Пример 3. Решение 4/5

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Решение.

$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$,

$(x-1)^4-2(x-1)^2+1-4=0$, $\left((x-1)^2-1\right)^2-2^2=0$,

$\left((x-1)^2-1-2\right)\left((x-1)^2-1+2\right)=0$, $\left((x-1)^2-3\right)\left((x-1)^2+1\right)=0$, откуда

$(x-1)^2-3=0$ или $(x-1)^2+1=0$.

Уравнение $(x-1)^2=-1$ не имеет корней.

Уравнение $(x-1)^2=3$; $x-1=\sqrt{3}$ или $x-1=-\sqrt{3}$; $x=1+\sqrt{3}$ или $x=1-\sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Задание 20. Пример 3. Решение 5

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Решение.

$$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0 \Leftrightarrow \left((x-1)^2-1\right)^2=2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=3\\(x-1)^2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=\sqrt{3}\\x-1=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$.

Задание 20. Пример 3. Работа 1

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

20

$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0.$ $(x-1)^4=t^2$

$t^2-2t-3=0.$ $(x-1)^2=t$

$D=4+12=16=4^2$

$x=\frac{2\pm4}{2}=\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}$

$(x-1)^2=3$

$x^2-2x+1=3.$

$x^2-2x-2=0.$

$D=4+8=12=2\sqrt{3}$

$x=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{2}(1\pm\sqrt{3})}{\cancel{2}}=1\pm\sqrt{3}$

$(x-1)^2=-1$

нет решений, т.к. квадрат не может быть отрицательным.

Ответ: $1+\sqrt{3}$; $1-\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

? баллов

Задание 20. Пример 3. Работа 1

20 Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

20

$(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0.$

$(x-1)^4 = t^2$

$(x-1)^2 = t$

$t^2 - 2t - 3 = 0.$

$D = 4 + 12 = 16 = 4^2$

$x = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$(x-1)^2 = 3$

$x^2 - 2x + 1 = 3.$

$x^2 - 2x - 2 = 0.$

$D = 4 + 8 = 12 = 2\sqrt{3}$

$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{\cancel{2}(1 \pm \sqrt{3})}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{3}$

$(x-1)^2 = -1$

нет решений, т.к. квадрат не может быть отрицательным.

Ответ: $1+\sqrt{3}$; $1-\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

0 баллов

Задание 20. Пример 3. Работа 2

20 $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$ Пусть $(x-1)^2=t$

$t^2-2t-3=0$

по т. Виета   по т. обр. т. Виета

$t_1+t_2=2$ | $t_1=-1$ не удовлетворяет условию

$t_1 t_2=-3$ | $t_2=3$

$(x-1)^2=t \quad t=3$

$(x-1)^2=3$

$1x^2-2x+1-3=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=b^2-4ac=4+8=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

? баллов

Задание 20. Пример 3. Работа 2

20

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

20

$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$ Пусть $(x-1)^2=t$

$t^2-2t-3=0$

по т. Виета | по т. обр. т. Виета

$t_1+t_2=2$ | $t_1=-1$ не удовлетворяет условию

$t_1t_2=-3$ | $t_2=3$

$(x-1)^2=t$ $t=3$

$(x-1)^2=3$

$1x^2-2x+1-3=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=b^2-4ac=4+8=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

ТЕОРЕМА

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Справедливо утверждение, обратное теореме Виета:

ТЕОРЕМА

Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

Пример 3. Найдём подбором корни уравнения

$$x^2-x-12=0.$$

▶ Дискриминант $D=1-4\cdot1\cdot(-12)$ — положительное число. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда

$$x_1+x_2=1 \text{ и } x_1\cdot x_2=-12.$$

Если x_1 и x_2 — целые числа, то они являются делителями числа -12. Учитывая также, что сумма этих чисел равна 1, нетрудно догадаться, что $x_1=-3$ и $x_2=4$. ◁

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

0 баллов

Задание 20. Пример 3. Работа 3

20 $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0.$

Пусть $(x-1)^2 = x \geq 0$,

$x^2 - 2x - 3 = 0;$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = -3;$

$D = b^2 - 4ac = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 + 12 = 16 = 4^2;$

$D > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет 2 корня;

$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3;$

$x_2 = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Ответ: $x = 3; -1.$

20 Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

? баллов

Задание 20. Пример 3. Работа 3

20

$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0.$

Пусть $(x-1)^2=x\geq 0,$

$x^2-2x-3=0;$

$a=1 \quad b=-2 \quad c=-3;$

$D=b^2-4ac=4+4\cdot3\cdot1=4+12=16=4^2;$

$D>0 \Rightarrow$ уравнение имеет 2 корня;

$x_1=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{2+4}{2}=\dfrac{6}{2}=3;$

$x_2=\dfrac{-b\mp\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{2-4}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$

Ответ: $x=3;-1.$

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

0 баллов

Задание 20. Пример 3. Работа 4

20 ① $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$

Пусть: $(x-1)^2=t$

Тогда: $t^2-2t-3=0$

$a=1;\ b=-2;\ c=-3$

$D=4+12=16;$

$t_1=\frac{2+4}{2}=3$

$t_2=\frac{2-4}{2}=-1.$

Ответ: 0; 2, $\frac{2+\sqrt{12}}{2}$; $\frac{2-\sqrt{12}}{2}$

② 1) $(x-1)^2=3$

$x^2-2x+1-3=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=12$

$x_1=\frac{2+\sqrt{12}}{2}$

$x_2=\frac{2-\sqrt{12}}{2}$

2) $(x-1)^2=-1$

$x^2-2x+1-1=0$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0;$

$x=0;\ x=2$

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Можно ли применить критерий «Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно» ???

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

? баллов

Задание 20. Пример 3. Работа 4

20

① $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$

Пусть: $(x-1)^2=t$

Тогда: $t^2-2t-3=0$

$a=1;\ b=-2;\ c=-3$

$D=4+12=16;$

$t_1=\frac{2+4}{2}=3$

$t_2=\frac{2-4}{2}=-1.$

② 1) $(x-1)^2=3$

$x^2-2x+1-3=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=12$

$x_1=\frac{2+\sqrt{12}}{2}$

$x_2=\frac{2-\sqrt{12}}{2}$

2) $(x-1)^2=-1$

$x^2-2x+1-1=0$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0;$

$x=0;\ x=2$

Ответ: $0;\ 2;\ \frac{2+\sqrt{12}}{2};\ \frac{2-\sqrt{12}}{2}$

20

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Можно ли применить критерий «Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно» ???

НЕТ !!!

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

0 баллов

Задание 20. Пример 4. Решение

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

Решение.

Пусть $t=\frac{1}{x}$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-t-6=0,$$

откуда $t=-2$ или $t=3$.

Уравнение $\frac{1}{x}=-2$ имеет корень $-\frac{1}{2}$.

Уравнение $\frac{1}{x}=3$ имеет корень $\frac{1}{3}$.

Таким образом, решение исходного уравнения: $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 4. Работа 1

20

$$\frac{1}{x^2}^{\backslash 1} - \frac{1}{x}^{\backslash x} - 6^{\backslash x^2} = 0$$

$$\frac{1 - x - 6x^2}{x^2} = 0 \qquad ОДЗ: x^2 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$1 - x - 6x^2 = 0 \mid \cdot (-1)$$

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 25 = 5^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{12}$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{12} = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1-5}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

Ответ. $x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = -\frac{1}{2}$

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

Ответ: $-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$.

? баллов

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 4. Работа 1

20

$$\frac{1}{x^2}^{\backslash 1} - \frac{1}{x}^{\backslash x} - 6^{\backslash x^2} = 0$$

$$\frac{1 - x - 6x^2}{x^2} = 0 \qquad ОДЗ: \; x^2 \neq 0, \; x \neq 0$$

$$1 - x - 6x^2 = 0 \;\Big|\cdot(-1)$$

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4\cdot(-1)\cdot 6 = 25 = 5^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{12}$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{12} = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1-5}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

Ответ. $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

2 балла

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 4. Работа 2

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

20

$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$

$\frac{1-x-6x^2}{x^2}=0 \quad |\cdot x^2$, $x\neq 0$

$-6x^2-x+1=0$

$D=1-4\cdot(-6)\cdot 1=25=5^2$

$x_1=-0{,}5$

$x_2=\frac{1}{3}$

Ответ: $x_1=-0{,}5$; $x_2=\frac{1}{3}$

? баллов

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 4. Работа 2

20

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$$

$$\frac{1 - x - 6x^2}{x^2} = 0 \quad |: x^2 \quad x \neq 0$$

$$-6x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-6) \cdot 1 = 25 = 5^2$$

$$x_1 = -0,5$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

Ответ: $x_1 = -0,5$; $x_2 = \frac{1}{3}$

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

0 баллов

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 5. Решение 1/3

20 Решите уравнение $\left(x^2-25\right)^2+\left(x^2+3x-10\right)^2=0$.

Решение.

Поскольку $\left(x^2-25\right)^2\geq 0$ и $\left(x^2+3x-10\right)^2\geq 0$, решениями исходного уравнения являются общие решения уравнений $x^2-25=0$ и $x^2+3x-10=0$.

Уравнение $x^2-25=0$ имеет корни -5 и 5.

Уравнение $x^2+3x-10=0$ имеет корни -5 и 2.

Значит, решением исходного уравнения является $x=-5$.

Ответ: -5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 5. Решение 2/3

20 Решите уравнение $\left(x^2-25\right)^2+\left(x^2+3x-10\right)^2=0$.

$$(x-5)^2(x+5)^2+(x+5)^2(x-2)^2=0$$

$$(x+5)^2((x-5)^2+(x-2)^2)=0$$

$(x+5)^2=0$ или $(x-5)^2+(x-2)^2=0$

$x=-5$

$$\begin{cases}(x-5)^2=0,\\(x-2)^2=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=5,\\x=2;\end{cases}$$

Ответ: -5. нет решений

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 5. Решение 3/3

20 Решите уравнение $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$.

$$((x-5)(x+5))^2+((x+5)(x-2))^2=0$$

$$(x-5)^2(x+5)^2+(x+5)^2(x-2)^2=0$$

$$(x+5)^2((x-5)^2+(x-2)^2)=0$$

$$(x+5)^2(x^2-10x+25+x^2-4x+4)=0$$

$$(x+5)^2=0 \quad \text{или} \quad 2x^2-14x+29=0$$

$$x=-5; \qquad \frac{D}{4}=49-58<0 - \textit{решений нет}$$

Ответ: -5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 5. Работа 1

20 Решите уравнение $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$.

Ответ: -5.

20

$(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$

Заметим, что сумма квадратов равна 0 тогда и только тогда, когда каждый квадрат равен 0.

$$\begin{cases}(x^2-25)^2=0\\(x^2+3x-10)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-25=0\\x^2+3x-10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+5)(x-5)=0\\(x+5)(x-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-5\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=-5$$

Ответ: $\{-5\}$

? баллов

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 5. Работа 1

20 Решите уравнение $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$.

Ответ: -5.

20

$(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$

Заметим, что сумма квадратов равна 0 тогда и только тогда, когда каждый квадрат равен 0.

$$\begin{cases}(x^2-25)^2=0\\(x^2+3x-10)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-25=0\\x^2+3x-10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+5)(x-5)=0\\(x+5)(x-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-5\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=-5$$

Ответ: $\{-5\}$

2 балла

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 5. Работа 2

20 Решите уравнение $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$.

Ответ: -5.

20 $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$

сумма двух квадратов =0, когда каждое из них =0

① $(x^2-25)^2=0$ и ② $(x^2+3x-10)^2=0$

$x^2+3x-10=0$

$(x-5)(x+5)=0$

$D=b^2-4ac$

$D=9+40$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5;\ x=+5$ $D=49$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-3-7}{2} \\ x_1=\frac{-3+7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x_1=-5;\ x_2=2$

Ответ; -5; 5; 2

? баллов

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 5. Работа 2

20 Решите уравнение $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$.

Ответ: -5.

20 $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$

~~двух~~ сумма двух ~~~~ квадратов =0, когда каждое из них =0

① $(x^2-25)^2=0$ и ② $(x^2+3x-10)^2=0$

$x^2+3x-10=0$

$D=b^2-4ac$

$D=9+40$

$D=49$

$(x-5)(x+5)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5;\ x=+5$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-3-7}{2} \\ x_1=\dfrac{-3+7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x_1=-5;\ x_2=2$

Ответ; -5; 5; 2

0 баллов

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 1. Решение 1/2

21 Первые 105 км автомобиль ехал со скоростью 35 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 60 км/ч, а последние 500 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.
Заметим, что всего автомобиль проехал $105+120+500=725$ (км), затратив на весь путь $\frac{105}{35}+\frac{120}{60}+\frac{500}{100}=10$ (часов). Таким образом, его средняя скорость равна $\frac{725}{10}=72{,}5$ (км/ч).
Ответ: 72,5 км/ч.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 1. Решение 2

21 Первые 105 км автомобиль ехал со скоростью 35 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 60 км/ч, а последние 500 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Автомобиль проехал 105 км со скоростью 35 км/ч за 3 часа;
120 км со скоростью 60 км/ч за 2 часа;
500 км со скоростью 100 км/ч за 5 часов.
Всего автомобиль проехал $105+120+500=725$ (км).
На весь путь автомобиль затратил 3 + 2 + 5 = 10 (часов).
Средняя скорость равна $\frac{725}{10}=72{,}5$ (км/ч).

Ответ: 72,5 км/ч.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 21. Пример 1. Работа 1

21 Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 36 км/ч, а вторую — со скоростью 99 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Пусть половина трассы составляет s километров. Тогда первую половину трассы автомобиль проехал за $\frac{s}{36}$ часа, а вторую — за $\frac{s}{99}$ часа. Значит, его средняя скорость в км/ч равна

$$\frac{2s}{\frac{s}{36}+\frac{s}{99}} = 52,8.$$

Ответ: 52,8 км/ч.

21 Возьмём весь путь за 1, тогда:

	S, км	T, ч	V, км/ч
I	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 36}$	36
II	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 99}$	99

Найти:

$v_{средняя}$ – ?

Решение:

1) Найдем всё время движения:

$$\frac{1^{(11}}{2\cdot 36}+\frac{1^{(4}}{2\cdot 99}=\frac{15}{792}=\frac{5}{264}\ (ч)$$

2) $$v_{средн}=\frac{S\ (\text{общ})}{T\ (\text{общ})}=\frac{1}{\frac{5}{264}}=\frac{264}{5}=\frac{528}{10}=52,8\ (км/ч)$$

Ответ: 52,8 км/ч

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 21. Пример 1. Работа 1

21 Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 36 км/ч, а вторую — со скоростью 99 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Пусть половина трассы составляет s километров. Тогда первую половину трассы автомобиль проехал за $\frac{s}{36}$ часа, а вторую — за $\frac{s}{99}$ часа. Значит, его средняя скорость в км/ч равна

$$\frac{2s}{\frac{s}{36}+\frac{s}{99}}=52{,}8.$$

Ответ: 52,8 км/ч.

21 Возьмём ~~весь~~ путь за 1, тогда:

	S, км	T, ч	V, км/ч
I	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 36}$	36
II	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 99}$	99

Найти:

$v_{средняя}$ — ?

Решение:

1) Найдем всё время движения:

$$\frac{1^{(11}}{2\cdot 36}+\frac{1^{(4}}{2\cdot 99}=\frac{15}{792}=\frac{5}{264}\ (ч)$$

2) $v_{средн} = \frac{S\ (общ)}{T\ (общ)} = \frac{1}{\frac{5}{264}} = \frac{264}{5} = \frac{528}{10} = 52{,}8\ (км/ч)$

Ответ: 52,8 км/ч

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

0 баллов

Задание 21. Пример 1. Работа 2

21 Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 36 км/ч, а вторую — со скоростью 99 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Пусть половина трассы составляет s километров. Тогда первую половину трассы автомобиль проехал за $\frac{s}{36}$ часа, а вторую — за $\frac{s}{99}$ часа. Значит, его средняя скорость в км/ч равна

$$\frac{2s}{\frac{s}{36}+\frac{s}{99}} = 52{,}8.$$

Ответ: 52,8 км/ч.

21

	s	v	t
I	$\frac{x}{2}$ км	36 км/ч	$\frac{x}{72}$ ч
II	$\frac{x}{2}$ км	99 км/ч	$\frac{x}{198}$ ч

x - весь путь (км)

$$v_{ср} = \frac{S_{все}}{t_{все}} = \frac{x}{\frac{x}{72}+\frac{x}{198}} = \frac{729\cancel{x}}{15\cancel{x}} = 48{,}6 \text{ км/ч}$$

Ответ 48,6 км/ч

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 21. Пример 1. Работа 2

21

	S	v	t
I	$\frac{x}{2}$ км	36 км/ч	$\frac{x}{72}$ ч
II	$\frac{x}{2}$ км	99 км/ч	$\frac{x}{198}$ ч

x - весь путь (км)

$$v_{ср} = \frac{S_{весь}}{t_{все}}, \quad \frac{\cancel{1}x}{\frac{x}{72}+\frac{x}{198}} = \frac{729\cancel{x}}{15\cancel{x}} = 48{,}6 \text{ км/ч}$$

792

Ответ 48,6 км/ч

21 Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 36 км/ч, а вторую — со скоростью 99 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Пусть половина трассы составляет s километров. Тогда первую половину трассы автомобиль проехал за $\frac{s}{36}$ часа, а вторую — за $\frac{s}{99}$ часа. Значит, его средняя скорость в км/ч равна

$$\frac{2s}{\frac{s}{36}+\frac{s}{99}} = 52{,}8.$$

Ответ: 52,8 км/ч.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

1 балл

Задание 21. Пример 2. Решение 1/3

21 Расстояние между пристанями А и В равно 108 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 50 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение.

Плот проплыл 50 км, значит, он плыл 10 часов, из которых лодка находилась в пути 9 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

$\frac{108}{v+5}+\frac{108}{v-5}=9$; $108v-540+108v+540=9v^2-225$; $v^2-24v-25=0$,

откуда $v=25$.

Ответ: 25 км/ч.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 21. Пример 2. Решение 3

21 Расстояние между пристанями A и B равно 108 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 50 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение.

Плот проплыл 50 км, значит, он плыл 10 часов, из которых лодка находилась в пути 9 часов.

Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

по течению реки скорость лодки $v+5$ км/ч, время – $\frac{108}{v+5}$ ч;

против течения реки скорость лодки $v-5$ км/ч, время – $\frac{108}{v-5}$ ч;

время движения лодки 9 ч, тогда получаем уравнение: $\frac{108}{v+5}+\frac{108}{v-5}=9$.

По условию лодка движется против течения, следовательно, $v>5$.

$108v-540+108v+540=9v^2-225$.

$v^2-24v-25=0$, $D=24^2-4\cdot(-25)=676=26^2$, $v=\frac{24-26}{2}$ или $v=\frac{24+26}{2}$;

Условию $v>5$ из корней $v=-1$ и $v=25$ удовлетворяет корень $v=25$.

Ответ: 25 км/ч.

Задание 21. Пример 3. Решение 1/2

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Решение.

Пусть скорость моторной лодки в неподвижной воде равна v км/ч.

Получаем уравнение: $\frac{77}{v-4}-\frac{77}{v+4}=2$; $77v+308-77v+308=2v^2-32$;

$v^2=324$, откуда $v=18$.

Ответ: 18 км/ч.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 21. Пример 3. Решение 2

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Решение.

Пусть скорость мотроной лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

против течения реки скорость лодки $v-4$ км/ч, время $\frac{77}{v-4}$ ч;

по течению реки скорость лодки $v+4$ км/ч, время $\frac{77}{v+4}$ ч;

время движения лодки против течения на 2 ч больше времени движения по течению, тогда получаем уравнение: $\frac{77}{v-4}-\frac{77}{v+4}=2$.

$77v+308-77v+308=2v^2-32$ при $v\neq\pm4$.

$v^2=324$, $v=-18$ или $v=18$; оба корня $v=-18$ и $v=18$ удовлетворяют условию $v\neq\pm4$.

Корень $v=-18$ не удовлетворяет условию задачи (скорость – величина положительная), корень $v=18$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 18 км/ч.

Задание 21. Пример 3. Работа 1

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

21 Пусть x – V лодки (км/ч)

тогда $x+4$ – V по течению (км/ч)

$x-4$ – V против течения (км/ч)

$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2$

$\cancel{\frac{77(x+4) - 77(x-4)}{(x-4)(x+4)} = 2}$

$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} - 2 = 0$

$\frac{77(x+4) - 77(x-4) - 2(x^2-16)}{(x-4)(x+4)} = 0$ О.Д.З.: $x \neq 4$, $x \neq -4$

$77x + 308 - 77x + 308 - 2x^2 + 32 = 0$

$-2x^2 + 32 + 616 = 0$

$2x^2 = 648$

$x^2 = 324$

$x_1 = 18$ $x_2 = -18$ (не подходит по смыслу)

18 км/ч – V лодки

Ответ: 18 км/ч

? баллов

…критерия	Баллы
…ен верный ответ	2
…ги присутствуют, но допущена …о характера	1

Задание 21. Пример 3. Работа 1

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

21 Пусть x – V лодки (км/ч)

тогда $x+4$ – V по течению (км/ч)

$x-4$ – V против течения (км/ч)

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2$$

$$\cancel{\frac{77(x+4) - 77(x-4)}{(x-4)(x+4)} = 2}$$

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} - 2 = 0$$

$$\frac{77(x+4) - 77(x-4) - 2(x^2-16)}{(x-4)(x+4)} = 0 \quad \text{О.Д.З.: } x \neq 4,\ x \neq -4$$

$$77x + 308 - 77x + 308 - 2x^2 + 32 = 0$$

$$-2x^2 + 32 + 616 = 0$$

$$2x^2 = 648$$

$$x^2 = 324$$

$x_1 = 18$ $x_2 = -18$ (не подходит по смыслу)

18 км/ч – V лодки

Ответ: 18 км/ч

…критерия	Баллы
…ен верный ответ	2
…аги присутствуют, но допущена …го характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

0 баллов

Задание 21. Пример 3. Работа 2

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

21

v	t	S
$x-4$ км/ч	$\frac{77}{x-4}$ ч	77 км
$x+4$ км/ч	$\frac{77}{x+4}$ ч	77 км

$$\frac{77}{x-4}-\frac{77}{x+4}=2$$

$$77(x+4)-77(x-4)=2(x^2-16)$$

$$77x+308-77x+308=2x^2-32$$

$$616=2x^2-32 \quad |:2$$

$$308=x^2-16$$

$$324=x^2$$

$$x=\pm 18$$

Ответ: 18 км/ч

? баллов

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 3. Работа 2

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

21

v	t	S
$x-4$ км/ч	$\frac{77}{x-4}$ ч	77 км
$x+4$ км/ч	$\frac{77}{x+4}$ ч	77 км

$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2$

$77(x+4) - 77(x-4) = 2(x^2-16)$

$77x + 308 - 77x + 308 = 2x^2 - 32$

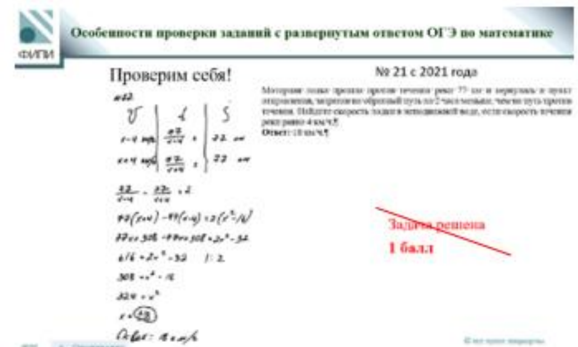
$616 = 2x^2 - 32 \quad | : 2$

$308 = x^2 - 16$

$324 = x^2$

$x = \pm 18$

Ответ: 18 км/ч



0 баллов

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 3. Работа 3

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

21

	v	t	S
по теч	$x+4$	$\frac{77}{x+4}$	77
пр теч	$x-4$	$\frac{77}{x-4}$	77

Составим уравнение:

$$\frac{77}{x-4}-\frac{77}{x+4}=2$$

$$\frac{77(x+4)-77(x-4)-2(x^2-16)}{x^2-16}=0$$

ОДЗ: $x\neq4$; $x\neq-4$

$$77(x+4-x+4)-2(x^2-16)=0$$

$$77\cdot 8-2x^2+32=0$$

$$616-2x^2+32=0$$

$$2x^2-648=0$$

$$x^2=324$$

$$x_1=18$$

$$x_2=-18$$

Ответ: 18

? баллов

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 3. Работа 3

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

21

	v	t	S
по теч	$x+4$	$\frac{77}{x+4}$	77
пр теч	$x-4$	$\frac{77}{x-4}$	77

составим уравнение:

$$\frac{77}{x-4}-\frac{77}{x+4}=2$$

$$\frac{77(x+4)-77(x-4)-2(x^2-16)}{x^2-16}=0$$

ОДЗ: $x\neq4$; $x\neq-4$

$$77(x+4-x+4)-2(x^2-16)=0$$

$$77\cdot8-2x^2+32=0$$

$$616-2x^2+32=0$$

$$2x^2-648=0$$

$$x^2=324$$

$$x_1=18$$

$$x_2=-18$$

Ответ: 18

0 баллов

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 3. Работа 4

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

21

$S = 77$

$t_{по\ теч}$ на 2 ч $< t_{против\ теч}$

$V_{теч} = 4$ км/ч

$V_{л} - ?$

Решение:

Пусть $x - V_{л}$, тогда $x+4 = V_{по\ теч}$, $x-4 = V_{против\ теч}$

$\frac{77^{(x-4}}{x+4} + 2^{x^2-16} = \frac{77^{(x+4}}{x-4} \mid x(x+4)(x-4)$

$77x - 308 + 2x^2 - 32 - 77x - 308 = 0$

$2x^2 - 648 = 0$

$x^2 - 324 = 0$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{324}$

$x_1 = 18$ $\quad x_2 = -18$ не подходит по условию

Ответ 18 км/ч

? баллов

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 21. Пример 3. Работа 4

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

21

$S = 77$

$t_{по\ теч}$ на 2ч $< t_{против\ теч}$

$V_{теч} = 4$ км/ч

$V_л - ?$

Решение:

Пусть $x - V_л$ тогда $x+4 = V_{по\ теч}$, $x-4 = V_{против\ теч}$

$$\frac{77}{x+4} + 2 = \frac{77}{x-4} \quad \Big| \cdot (x+4)(x-4)$$

$77x - 308 + 2x^2 - 32 - 77x - 308 = 0$

$2x^2 - 648 = 0$

$x^2 - 324 = 0$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{324}$

$x_1 = 18$ $\quad x_2 = -18$ не подходит по условию

Ответ 18 км/ч

0 баллов

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 4. Решение

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.
Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-20$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{240}{v-20}-\frac{240}{v}=1;\ 240v-240v+4800=v^2-20v;\ v^2-20v-4800=0,$$

откуда $v=80$.
Ответ: 80 км/ч.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 21. Пример 4. Работа 1

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 80 км/ч.

21

	S км	V км/ч
1	240	x+20
2	240	x

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+20} = +1$$

$$\frac{240x - 240x + 4800 - x^2 - 20x}{x^2+20x} = 0$$

$$\frac{-x^2 - 20x + 4800}{x^2+20x} = 0 \,/\, x^2+20x; \quad ОДЗ: x \neq 0;\ x \neq 20$$

$$-x^2 - 20x + 4800 = 0$$

$$D = 400 - 4\cdot(-1)\cdot 4800 = 400 + 19200 = 19600 = 140^2$$

$$x_1 = \frac{20+140}{-2} = \frac{160}{-2} = -80 \text{ (не удов. усл. зад.)}$$

$$x_2 = \frac{20-140}{-2} = \frac{-120}{-2} = +60$$

~~Ответ~~

$V_1 = 80$ км/ч Ответ: $V_1 = 80$ км/ч

? баллов

	Баллы
	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 4. Работа 1

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.
Ответ: 80 км/ч.

21

	S км	V км/ч
1	240	$x+20$
2	240	x

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+20} = +1$$

$$\frac{240x - 240x + 4800 - x^2 - 20x}{x^2+20x} = 0$$

$$\frac{-x^2 - 20x + 4800}{x^2+20x} = 0 \; / x^2+20x;$$ ОДЗ: $x \neq 0$; $x \neq 20$

$$-x^2 - 20x + 4800 = 0$$

$$D = 400 - 4\cdot(-1)\cdot 4800 = 400 + 19200 = 19600 = 140^2$$

$$x_1 = \frac{20+140}{-2} = \frac{160}{-2} = -80$$ (не удов. усл. зад.)

$$x_2 = \frac{20-140}{-2} = \frac{-120}{-2} = +60$$

~~Ответ.~~

$V_1 = 80$ км/ч

Ответ: $V_1 = 80$ км/ч

0 баллов

	Баллы
	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 4. Работа 2

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 80 км/ч.

21

	Скор.	Время	Расстояние
I автом	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км
II автом	$x-20$ км/ч	$\frac{240}{x-20}$ ч	240 км

$\frac{240}{x-20}-\frac{240}{x}=1$ $\quad$ $\frac{240x-240x-240\cdot20}{x(x-20)}=1$

$x^2-20x=4800$

$x^2-20x-4800=0$

$\begin{cases} x_2=-60 \text{ (не уд.)} \\ x_1=80 \end{cases}$ $\quad$ Ответ: 80 км/ч

? баллов

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 4. Работа 2

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 80 км/ч.

21

	Скор.	Время	Расстояние
I автом.	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км
II автом.	$x-20$ км/ч	$\frac{240}{x-20}$ ч	240 км

$$\frac{240}{x-20}-\frac{240}{x}=1 \qquad \frac{240x-240x-240\cdot 20}{x(x-20)}=1$$

$$x^2-20x=4800$$

$$x^2-20x-4800=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-60 \text{ (не удв.)} \\ x_2=80 \end{array}\right.$$

Ответ: 80 км/ч

0 баллов

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

16. Линейная функция и её график

Пример 3. Построим график функции $y = 2x + 3$.

▶ Функция $y = 2x + 3$ линейная, поэтому её графиком является прямая. Используя формулу $y = 2x + 3$, найдём координаты двух точек графика:
если $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$;
если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.
Отметим точки $A(-2; -1)$ и $B(1; 5)$. Проведём через эти точки прямую (рис. 33). Прямая AB есть график функции $y = 2x + 3$. ◁

При построении графика линейной функции часто бывает удобно в качестве одной из точек брать точку с абсциссой 0.

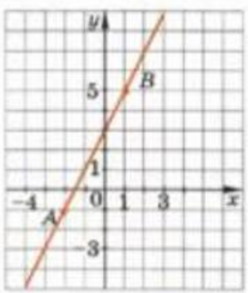


Рис. 33

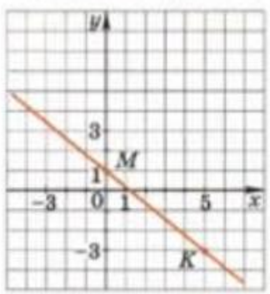


Рис. 34

Пример 4. Построим график функции $y = -0{,}8x + 1$.

▶ Найдём координаты двух точек графика:
если $x = 0$, то $y = -0{,}8 \cdot 0 + 1 = 1$;
если $x = 5$, то $y = -0{,}8 \cdot 5 + 1 = -3$.
Отметим точки $M(0; 1)$ и $K(5; -3)$ и проведём через них прямую (рис. 34). Прямая MK — график функции $y = -0{,}8x + 1$. ◁

Для тех, кто хочет знать больше

17. Задание функции несколькими формулами

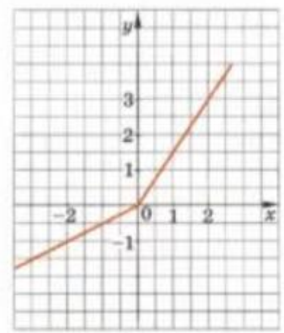


Рис. 46

Пример 2. Построим график функции $y = x + 0{,}5|x|$.

▶ Освободимся от знака модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$. Значит,

$$y = x - 0{,}5x = 0{,}5x \text{ при } x < 0.$$

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$. Значит, $y = x + 0{,}5x = 1{,}5x$ при $x \geqslant 0$.
Итак, данную функцию можно задать двумя формулами:

$$y = \begin{cases} 0{,}5x, & \text{если } x < 0, \\ 1{,}5x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

На рисунке 46 изображён график этой функции. Он состоит из двух лучей. ◁

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

7. Построение графика квадратичной функции

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:
1) найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости;
2) построить еще несколько точек, принадлежащих параболе;
3) соединить отмеченные точки плавной линией.

Заметим, что абсциссу m вершины удобно находить по формуле $m = -\frac{b}{2a}$. Ординату n можно находить, подставив найденное значение абсциссы в формулу $y = ax^2 + bx + c$, так как при $x = m$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n = n.$$

Приведем примеры построения графиков квадратичных функций.

Пример 1. Построим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$.

▶ Графиком функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты m и n вершины этой параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 0{,}5} = -3;$$

$$n = 0{,}5 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 0{,}5 = -4.$$

Значит, вершина параболы — точка $(-3; -4)$.
Составим таблицу значений функции:

x	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	4	0,5	−2	−3,5	−4	−3,5	−2	0,5	4

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ (рис. 31). ◁

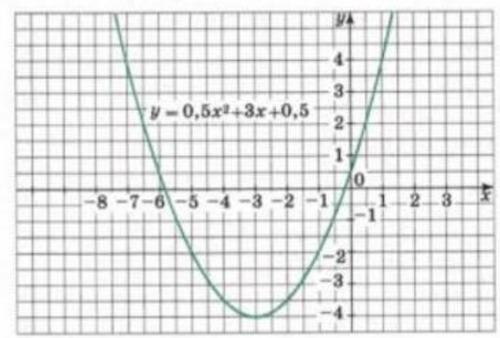


Рис. 31

При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая $x = -3$ является осью симметрии параболы. Поэтому мы брали точки с абсциссами −4 и −2, −5 и −1, −6 и 0, симметричные относительно прямой $x = -3$ (эти точки имеют одинаковые ординаты).

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом: задания высокого уровня сложности (задание 22)

Для тех, кто хочет знать больше

10. Дробно-линейная функция и ее график

Вам известны свойства и график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$. Отметим еще одно свойство этой функции и особенность ее графика.

При неограниченном возрастании положительных значений аргумента значения функции, оставаясь положительными, убывают и стремятся к нулю, т. е. если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$. Аналогично если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$. На графике это свойство проявляется в том, что точки графика по мере их удаления в бесконечность (т. е. при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$) неограниченно приближаются к оси x. Говорят, что ось x, т. е. прямая $y = 0$, является *асимптотой* графика функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$.

Пример 1. Построим график функции $y = \frac{2x+4}{x-1}$.

▶ Для этого выделим из дроби $\frac{2x+4}{x-1}$ целую часть, представив дробь в виде $n + \frac{k}{x-m}$.

Имеем

$$\frac{2x+4}{x-1} = \frac{2x-2+6}{x-1} = \frac{2(x-1)+6}{x-1} = 2 + \frac{6}{x-1}.$$

Здесь $k = 6$, $m = 1$, $n = 2$.

График функции $y = \frac{6}{x-1} + 2$ можно получить из графика функции $y = \frac{6}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы $y = \frac{6}{x}$ на 1 единицу вправо вдоль оси x и сдвига полученного графика $y = \frac{6}{x-1}$ на 2 единицы вверх в направлении оси y. При этом преобразовании сдвинутся и асимптоты гиперболы $y = \frac{6}{x}$: ось x перейдет в прямую $y = 2$, а ось y — в прямую $x = 1$.

Для построения графика данной функции поступим так: проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямую $x = 1$ и прямую $y = 2$. Так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две таблицы: одну для $x < 1$, другую для $x > 1$.

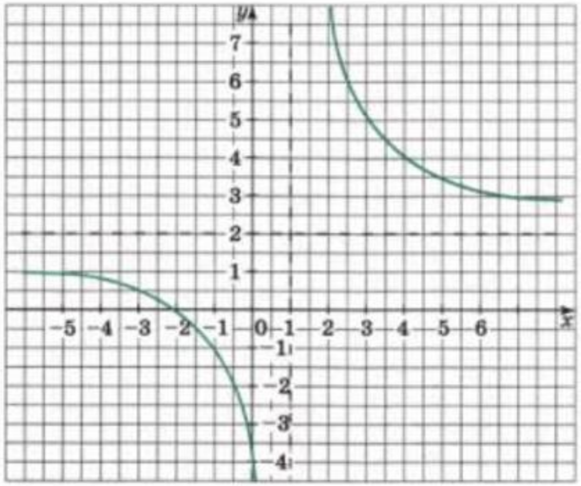


Рис. 45

x	−5	−3	−2	−1	0
y	1	0,5	0	−1	−4

x	2	3	4	5	7
y	8	5	4	3,5	3

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Аналогично используя вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы. График функции $y = \frac{2x+4}{x-1}$ изображен на рисунке 45. ◁

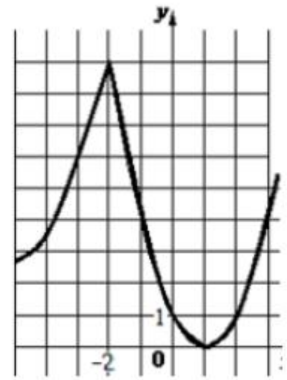
Задание 22. Пример 1. Решение 1/2

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.



Построим график функции $y=-\dfrac{18}{x}$ при $x<-2$ и график функции $y=x^2-2x+1$ при $x\geq -2$.

Прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m=0$ и при $m\geq 9$.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 22. Пример 1. Решение 2

Решение.

Построим график функции $y = -\dfrac{18}{x}$.

Графиком является гипербола, состоящая из двух ветвей, расположенных во второй и четвертой четвертях.

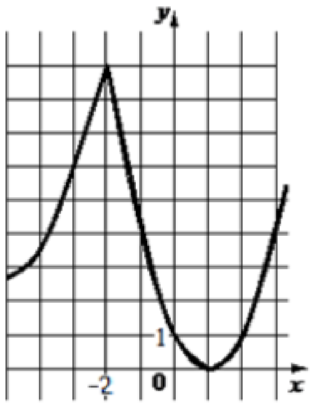
Так как нужна ветвь гиперболы при $x < -2$, то строим ветвь во второй четверти.

x	-1	-2	-3	-6	-9	-18
y	18	**9**	6	3	2	1

Построим график функции $y = x^2 - 2x + 1$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы – (1; 0). Так нам нужна часть параболы при при $x \geq -2$, то вычислим координаты точек при $x \geq -2$, учитываю симметрию относительно прямой $x = 1$.

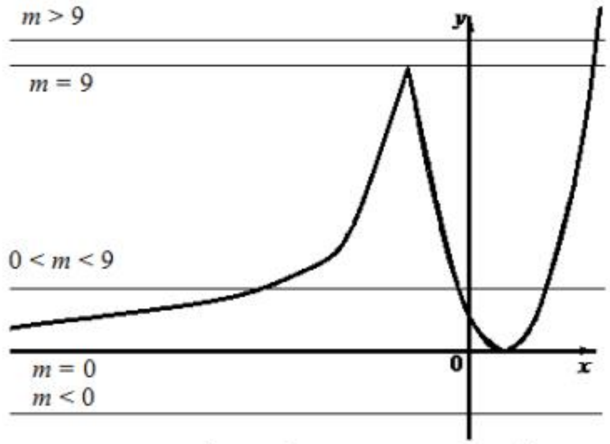
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	**9**	4	1	0	1	4	9



Оставим ветвь гиперболы при $x < -2$ и часть параболы при $x \geq -2$. (В точке $x = -2$ происходит «склейка» графиков.)

Задание 22. Пример 1. Решение 2 (*окончание*)

Построим семейство прямых $y = m$, параллельных или совпадающих с осью Ox.



При $m < 0$ прямая $y = m$ с графиком функции не имеет общих точек;
при $m = 0$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку;
при $0 < m < 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет три общих точки;
при $m = 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет две общие точки;
при $m > 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку.

Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 9$.

Ответ: 0; $[9; +\infty)$.

Задание 22. Пример 1. Работа 1

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\ge -2,\\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

$y\begin{cases} x^2-2x+1 & (x\geqslant -2)\\ -\frac{18}{x} & (x<-2)\end{cases}$

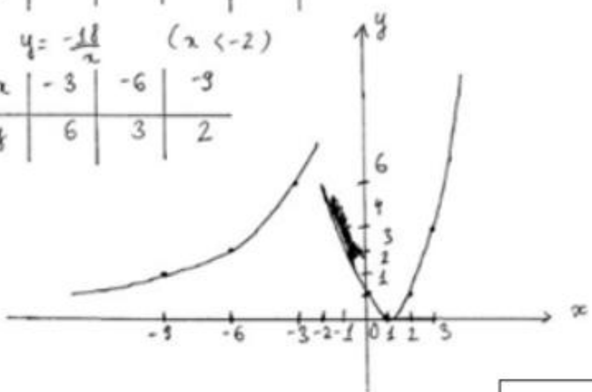
① $y=x^2-2x+1$ $(x\geqslant 2)$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1 \Rightarrow y_0=1^2-2\cdot 1+1=1-2+1=0$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

② $y=-\frac{18}{x}$ $(x<-2)$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



Рассмотрим на график:

При $x=-2$ прямая $y=m$ имеет с графиком две общие точки

$x=-2 \Rightarrow m=y=9$

Ответ: 9

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 1

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\ge -2,\\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

$$y\begin{cases} x^2-2x+1 & (x\geqslant -2)\\ -\dfrac{18}{x} & (x<-2)\end{cases}$$

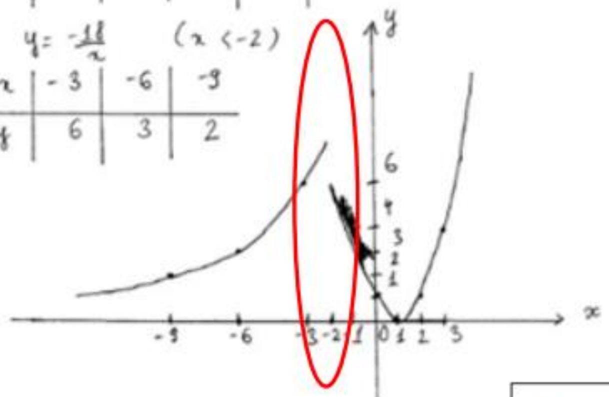
① $y = x^2-2x+1 \quad (x \geqslant 2)$

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 1^2 - 2\cdot 1 + 1 = 1-2+1 = 0$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

② $y = -\dfrac{18}{x} \quad (x<-2)$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



Рассмотрим на график.

При $x=-2$ прямая $y=m$ имеет с графиком две общие точки

$x=-2 \Rightarrow m = y = 9$

Ответ: 9

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

0 баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 2

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2, \\ -\frac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1 \text{ ; при } x\geq -2 \\ -\frac{18}{x} \text{ ; при } x<-2 \end{cases}$$

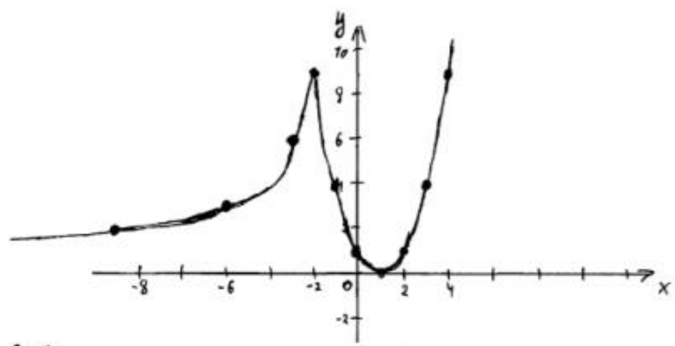
$-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2}=1$ $\qquad$ $y=1-2+1=0$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$y=x^2-2x+1$; при $x\geq -2$

x	-9	-6	-3	[illegible]
y	2	3	6	[illegible]

$y=-\frac{18}{x}$, при $x<-2$



Ответ: при $m=0$ и $m\in[9;+\infty)$

? баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 22. Пример 1. Работа 2

$y = \begin{cases} x^2-2x+1 \ ; \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} \ ; \text{при } x < -2 \end{cases}$

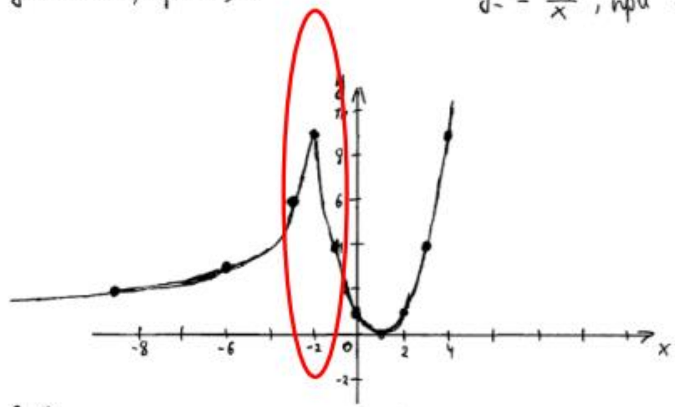
$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = 1-2+1 = 0$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$y = x^2 - 2x + 1$; при $x \geq -2$

x	-9	-6	-3
y	2	3	6

$y = -\frac{18}{x}$, при $x < -2$



Ответ: при $m=0$ и $m \in [9;+\infty)$

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

0 баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 22. Пример 1. Работа 3

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x \ge -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

$$y\begin{cases} {}^{1)}\; x^2-2x+1, \text{ при } x \geqslant -2 \\ {}^{2)}\; -\dfrac{18}{x} \text{ , при } x<-2 \end{cases}$$

1) $y=x^2-2x+1$

$x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2}=1$

$y_0=(1)^2-2\cdot1+1=1-2+1=0$

$(1;0)$ – вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

2) $y=-\dfrac{18}{x}$

x	3	6	2
y	-6	-3	-9

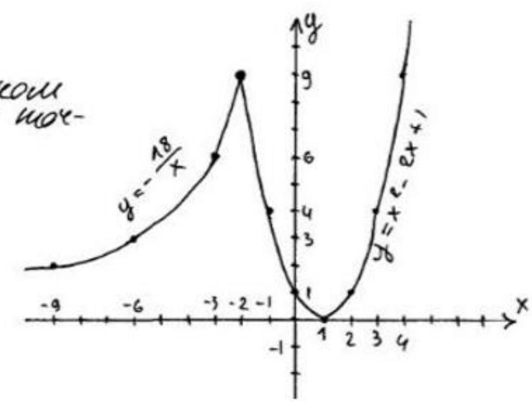
x	-3	-6	-2
y	6	3	9

$y=m$

m – ? (имеет с графиком одну или две общие точки)

$m=0;[9;+\infty)$

Ответ: $0;[9;+\infty)$ – m



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 3

№ 22 с 2021 года

23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

$$y\begin{cases} 1)\ x^2-2x+1, \text{ при } x \geq -2 \\ 2)\ -\dfrac{18}{x}, \text{ при } x<-2 \end{cases}$$

1) $y = x^2 - 2x + 1$

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

$y_0 = (1)^2 - 2\cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$(1; 0)$ – вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

2) $y = -\dfrac{18}{x}$

x	3	6	2
y	-6	-3	-9

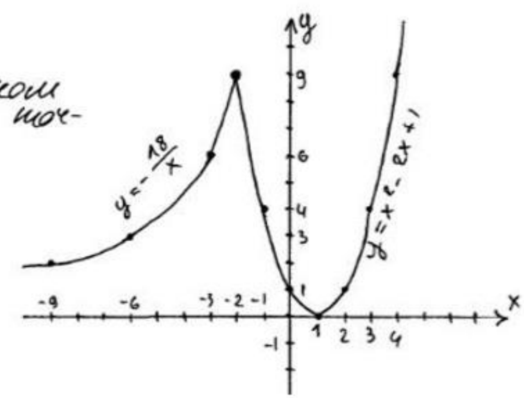
x	-3	-6	-2
y	6	3	9

$y=m$

m – ? (имеет с графиком одну или две общие точки)

$m = 0; [9; +\infty)$

Ответ: $0; [9; +\infty)$ – m



0 баллов

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 22. Пример 1. Работа 3

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9; +\infty)$.

$$y \begin{cases} 1)\ x^2 - 2x + 1, \text{ при } x \geq -2 \\ 2)\ -\dfrac{18}{x}, \text{ при } x < -2 \end{cases}$$

1) $y = x^2 - 2x + 1$

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

$y_0 = (1)^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$(1; 0)$ – вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

2) $y = -\dfrac{18}{x}$

x	3	6	2
y	-6	-3	-9

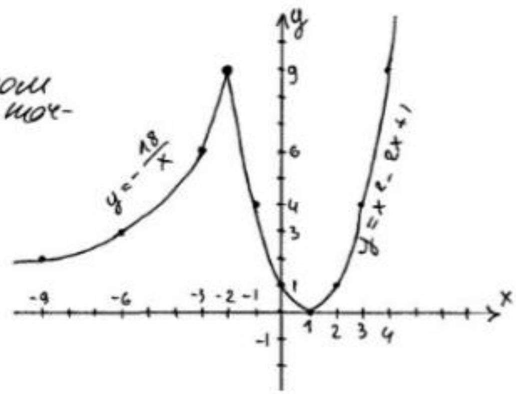
x	-3	-6	-2
y	6	3	9

$y = m$

m – ? (имеет с графиком одну или две общие точки)

$m = 0; [9; +\infty)$

Ответ: $0; [9; +\infty)$ – m



? баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 22. Пример 1. Работа 3

Постройте график функции

$$y=\begin{cases}x^2-2x+1, \text{ если } x\ge -2,\\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

$$y\begin{cases}1)\ x^2-2x+1, \text{ при } x\geqslant -2\\ 2)\ -\dfrac{18}{x}, \text{ при } x<-2\end{cases}$$

1) $y=x^2-2x+1$

$x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{2}=1$

$y_0=(1)^2-2\cdot1+1=1-2+1=0$

$(1;0)$ – вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

2) $y=-\dfrac{18}{x}$

x	3	6	2
y	-6	-3	-9

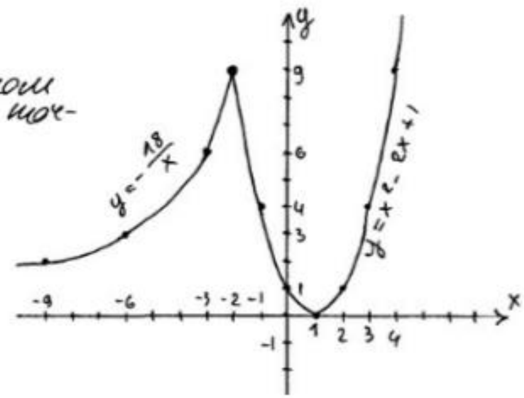
x	-3	-6	-2
y	6	3	9

$y=m$

m – ? (имеет с графиком одну или две общие точки)

$m=0;\ [9;+\infty)$

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$ – m



0 баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 22. Пример 1. Работа 4

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x\ge -2,\\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

$D(y): x \in (-\infty;0);(0;+\infty)$.

$y=x^2-2x+1$

квадратичная функция

график – парабола

ветви вверх.

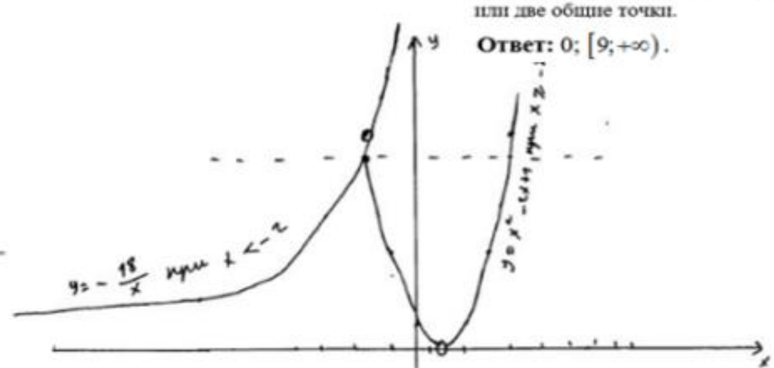
$x_в = \frac{2}{2} = 1$

$y_в\ 1-2+1=0$

$y=-\frac{18}{x}$

график – гипербола

x	1	18	2	3	...
y	-18	-1	-9	-6	...



Прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m=8$ или $m=0$.

Ответ: $0;8$

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 4

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2,\\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

$D(y): x \in (-\infty;0);(0;+\infty)$.

$y = x^2 - 2x + 1$

квадратичная функция

график - парабола

ветви вверх.

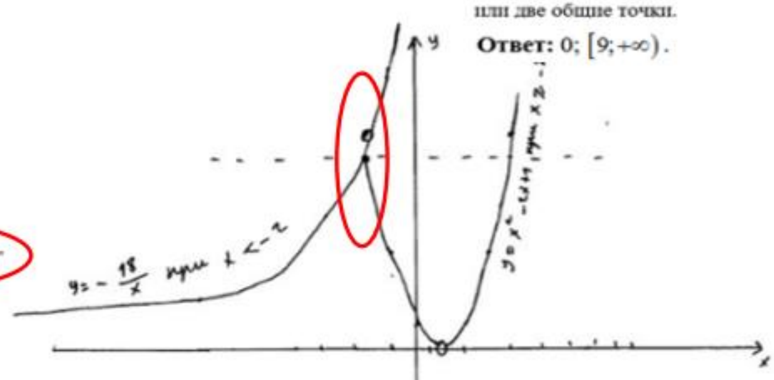
$x_0 = \frac{2}{2} = 1$

$y_0 = 1 - 2 + 1 = 0$

$y = -\frac{18}{x}$

график - гипербола

x	1	18	2	3	...
y	-18	-1	-9	-2	...



Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 8$ или $m = 0$.

Ответ: 0; 8

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

0 баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 5

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2,\\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: $0;\ [9;+\infty)$.

№23.

$y=\begin{cases} x^2-2x+1 \text{ при } x\geq -2.\\ -\frac{18}{x} \text{ при } x<-2\end{cases}$

$y=x^2-2x+1=0$

т. $O(1;0)$

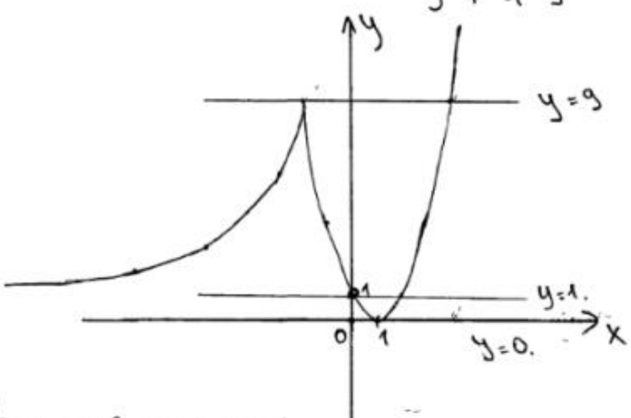
x	0	-1	-2
y	1	4	9

$y=-\frac{18}{x}$

x	-2	-3	-6	-9
y	9	6	3	2

ОДЗ

$x\neq 0.$



Ответ: $m=0,\ m=9,\ m=1.$

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

? баллов

Задание 22. Пример 1. Работа 5

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

№23.

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1 \text{ при } x \geqslant -2. \\ -\dfrac{18}{x} \text{ при } x<-2 \end{cases}$$

$y=x^2-2x+1=0$

т. О$(1;0)$

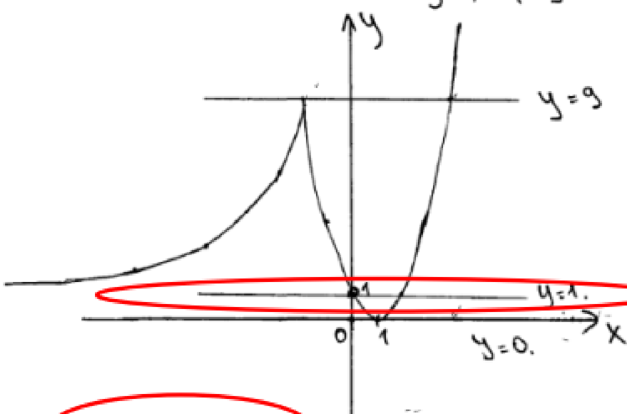
x	0	-1	-2
y	1	4	9

$y=-\dfrac{18}{x}$

x	-2	-3	-6	-9
y	9	6	3	2

ОДЗ

$x \neq 0$



Ответ: $m=0$, $m=9$, $m=1$.

0 баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 22. Пример 2. Решение 1/3

Постройте график функции

$$y = \left|x^2 - 4x + 3\right|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

Построим график функции $y = x^2 - 4x + 3$ при $x < 1$ и $x > 3$ и график функции $y = -x^2 + 4x - 3$ при $1 \le x \le 3$.

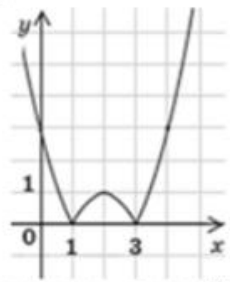


График данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс, 0, 2, 3 или 4 общие точки.

Ответ: 4.

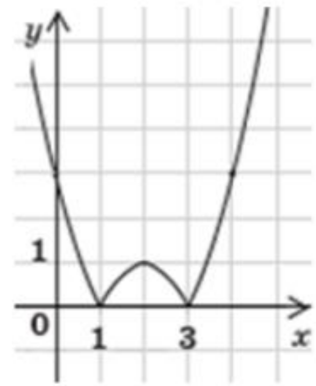
Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 22. Пример 2. Решение 2/3

Решение.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, \text{ если } x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ -x^2 + 4x - 3, \text{ если } x^2 - 4x + 3 \leq 0; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, \text{ если } x \leq 1 \text{ или } x \geq 3, \\ -x^2 + 4x - 3, \text{ если } 1 < x < 3. \end{cases}$$

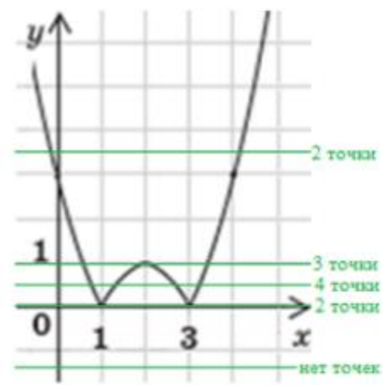


Построим график этой функции:

1) При $x < 1$ и $x > 3$ – часть параболы $y = x^2 - 4x + 3$ – ветви направлены вверх, вершина имеет координаты (2; – 1) – расположенная в верхней полуплоскости относительно оси Ox.

2) При $1 \leq x \leq 3$ – часть параболы $y = -x^2 + 4x - 3$ – ветви направлены вниз, вершина имеет координаты (2; 1) – расположенная в нижней полуплоскости относительно оси Ox.

Обе параболы проходят через точки (1; 0) и (3; 0).

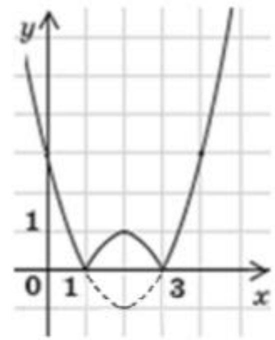


Прямая, параллельная оси абсцисс, может иметь с построенным графиком функции 0, 2, 3 и 4 точки. Наибольшее число общих точек – 4.

Ответ: 4.

Задание 22. Пример 2. Решение 3

Решение.



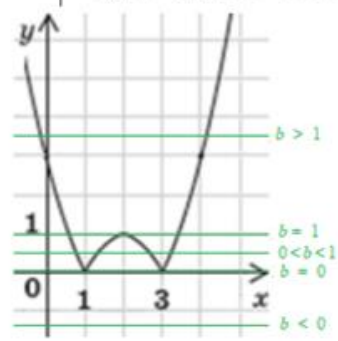
$$\left|x^2-4x+3\right| = \begin{cases} x^2-4x+3, \text{ если } x^2-4x+3 \geq 0, \\ -x^2+4x-3, \text{ если } x^2-4x+3 \leq 0; \end{cases}$$

$$\left|x^2-4x+3\right| = \begin{cases} x^2-4x+3, \text{ если } x \leq 1 \text{ или } x \geq 3, \\ -x^2+4x-3, \text{ если } 1 < x < 3. \end{cases}$$

Построим график функции $y = x^2 - 4x + 3$. Графиком функции $y = x^2 - 4x + 3$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты (2; – 1).

При $x < 1$ и $x > 3$ графиком функции $y = \left|x^2-4x+3\right|$ будет часть параболы $y = x^2 - 4x + 3$, расположенная в верхней полуплоскости относительно оси Ox.

2) При $1 \leq x \leq 3$ графиком функции $y = \left|x^2-4x+3\right|$ будет другая часть параболы $y = x^2 - 4x + 3$, отраженная симметрично относительно оси Ox в верхнюю полуплоскость координатной плоскости.



Прямая, параллельная оси абсцисс, задается уравнением $y = b$. Эта прямая пересекает построенный график функции в 2, 3 или 4 точках или не пересекает его. Наибольшее число общих точек – 4.

Ответ: 4.

Задание 22. Пример 2. Работа 1

Постройте график функции

$$y = \left| x^2 - 4x + 3 \right|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Ответ: 4.

Решение

Построим график функции $y=|x^2-4x+3|$ Графиком является парабола, $a=1$ (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции $y=|f(x)|$ можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси OX сохранить, а часть лежащую ниже оси OX отобразить над осью OX.

Найдём вершину параболы $x_0; y_0$ $x_0=\frac{-b}{2a}$. $x_0=\frac{4}{2}=2$

$y_0=2^2-8+3=-1$ $(2;-1)$ – вершина

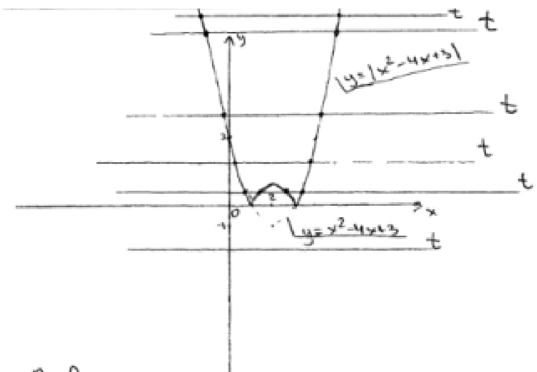
OY: $0^2-4\cdot0+3=3$ $(0;3)$

OX: $x^2-4x+3=0$

$D=16-12=4$

$x_1=\frac{4+2}{2}=3$ $x_2=\frac{4-2}{2}=1$ $(3;0);(1;0)$

$y(5)=5^2-5\cdot4+3=25-20+3=8$ $(5;8)$



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямые t и отметим её точки пересечения с графиком $y=|x^2-4x+3|$

Ответ: 4 общих точки

? баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 22. Пример 2. Работа 1

Постройте график функции

$$y = \left|x^2 - 4x + 3\right|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Ответ: 4.

Решение

Построим график функции $y=|x^2-4x+3|$ Графиком является парабола, $a=1$ (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции $y=|f(x)|$ можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси OX сохранить, а часть лежащую ниже оси OX отобразить над осью OX.

Найдём вершину параболы $x_0; y_0$ $x_0=\frac{-b}{2a}$. $x_0=\frac{4}{2}=2$

$y_0=2^2-8+3=-1$ $(2;-1)$ – вершина

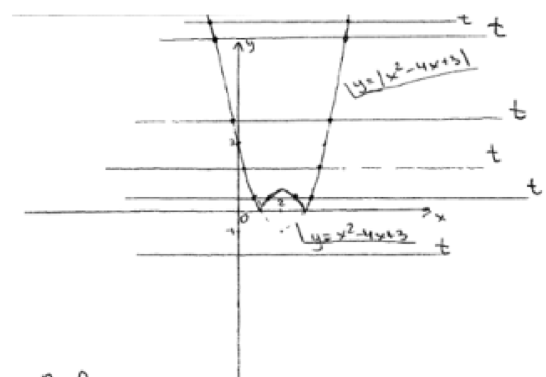
$OY: 0^2-4\cdot0+3=3$ $(0;3)$

$OX: x^2-4x+3=0$

$D=16-12=4$

$x_1=\frac{4+2}{2}=3$ $x_2=\frac{4-2}{2}=1$ $(3;0);(1;0)$

$y(5)=5^2-5\cdot4+3=25-20+3=8$ $(5;8)$



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямые t и отметим её точки пересечения с графиком $y=|x^2-4x+3|$

Ответ: 4 общих точки

0 баллов

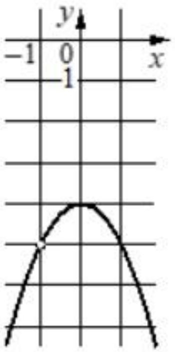
Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 22. Пример 3. Решение

Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение: $\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=-x^2-4$ при условии, что $x\neq-1$. Построим график (см. рисунок).



Прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $(-1;-5)$ или если уравнение $-x^2-4=kx$ имеет один корень. Дискриминант уравнения $x^2+kx+4=0$ равен k^2-16, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k=5$, $k=-4$ и $k=4$.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 22. Пример 3. Работа 1

Постройте график функции $y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

$y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=\frac{(x^2+4)\cancel{(x+1)}}{-\cancel{(1+x)}}=-(x^2+4)=-x^2-4$

$y=-x^2-4$ - ф. квадратичная, гр. парабола, ветви ↓, вершина $(0;-4)$

$-1-x\neq0$

$-x\neq1 \mid\cdot(-1)$

$x\neq-1$

$kx=-x^2-4$

$kx+x^2+4=0$

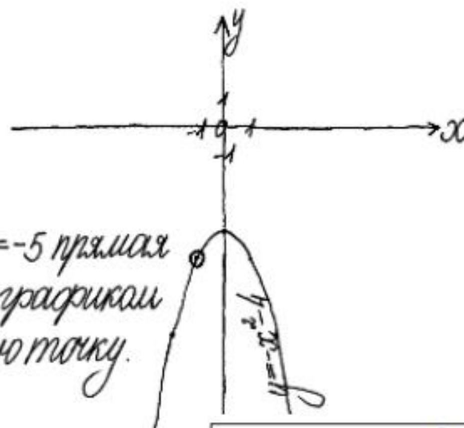
$D=k^2-4\cdot4=$

$=k^2-16$

$k^2-16=0$

$(k-4)(k+4)=0$

$k_1=4$ или $k_2=-4$



При $k=\pm4$ и $k=-5$ прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ±4; -5.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

? баллов

Задание 22. Пример 3. Работа 1

Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

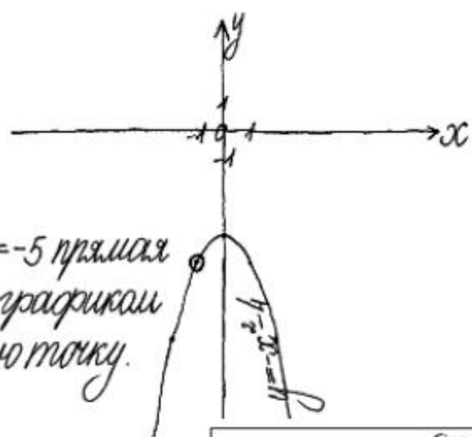
$y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=\dfrac{(x^2+4)\cancel{(x+1)}}{-\cancel{(1+x)}}=-(x^2+4)=-x^2-4$

$y=-x^2-4$ - ф. квадратичная, гр. парабола, ветви ↓, вершина $(0;-4)$

$-1-x\neq 0$

$-x\neq 1 \quad |\cdot(-1)$

$x\neq -1$



$kx=-x^2-4$

$kx+x^2+4=0$

$D=k^2-4\cdot 4=$

$=k^2-16$

$k^2-16=0$

$(k-4)(k+4)=0$

$k_1=4$ или $k_2=-4$

При $k=\pm 4$ и $k=-5$ прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ± 4; -5.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

0 баллов

Задание 22. Пример 3. Работа 2

Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

$y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$

$y=\dfrac{-(x^2+4)(-x-1)}{-x-1}$

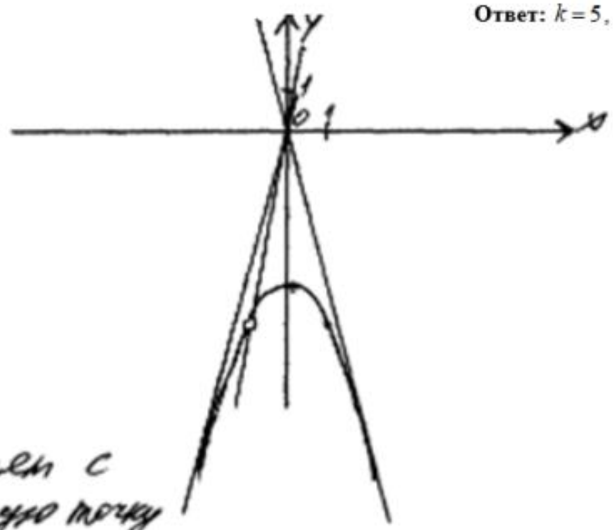
$y=-(x^2+4)$, где $-x-1\neq 0$

$y=-x^2-4$, где $x\neq -1$

квадр. функция; графики парабола; ветви вниз

вершина $(0;-4)$

Ответ: прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $k=-4; 4; 5$



Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 22. Пример 3. Работа 2

Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

$y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$

$y=\dfrac{-(x^2+4)(-x-1)}{-x-1}$

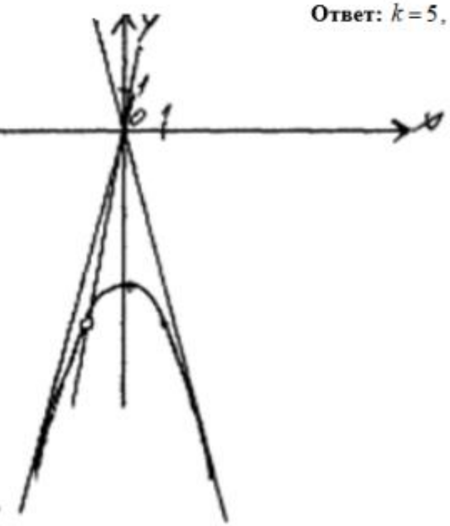
$y=-(x^2+4)$, где $-x-1\neq 0$

$y=-x^2-4$, где $x\neq -1$

квадр. функция; график парабола; ветви вниз

вершина $(0;-4)$

Ответ: прямая $y=kx$ имеет с графиком равно одну общую точку при $k=-4;4;5$



Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

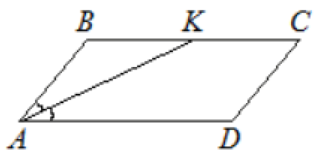
0 баллов

Задание 23. Пример 1. Решение 1/3

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 12$, $CK = 16$.

Решение.

Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK, AK — биссектриса угла BAD.



Следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$. Значит, треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK = 12$.

По формуле периметра параллелограмма находим:

$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 80$.

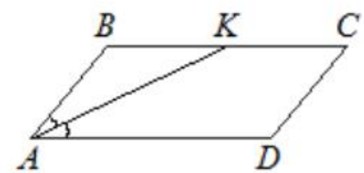
Ответ: 80.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 23. Пример 1. Решение 2/3

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 12$, $CK = 16$.

Решение.



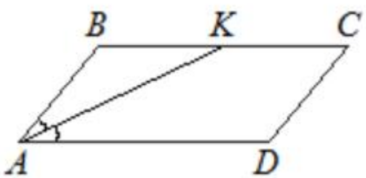
Углы BKA и KAD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK.
AK — биссектриса угла BAD.
Следовательно, $\angle BKA = \angle KAD = \angle BAK$. Значит, треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK = 12$.
В параллелограмме $ABCD$: $AB = 12$, $BC = BK + KC = 28$.
$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 80$.
Ответ: 80.

Задание 23. Пример 1. Решение 3

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 12$, $CK = 16$.

Решение.

Биссектриса параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник. AK — биссектриса угла BAD. Следовательно, треугольник BKA равнобедренный и $AB = BK = 12$.



В параллелограмме $ABCD$: $AB = 12$, $BC = BK + KC = 28$.

$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 80$.

Ответ: 80.

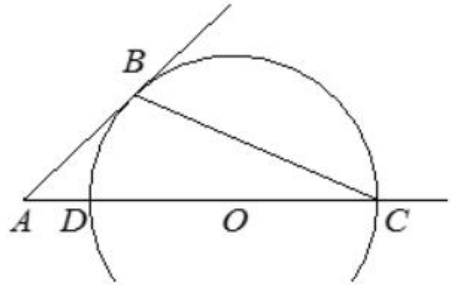
Задание 23. Пример 2. Решение 1/4

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Решение.

Пусть $AC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:

$AB^2 = AC(AC - CD)$; $64 = x(x - 3{,}6)$, откуда $x = 10$.



Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 23. Пример 2. Решение 2/4

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Решение.

Прямая AB касается окружности, следовательно, радиус OB, равный 1,8, перпендикулярен AB.

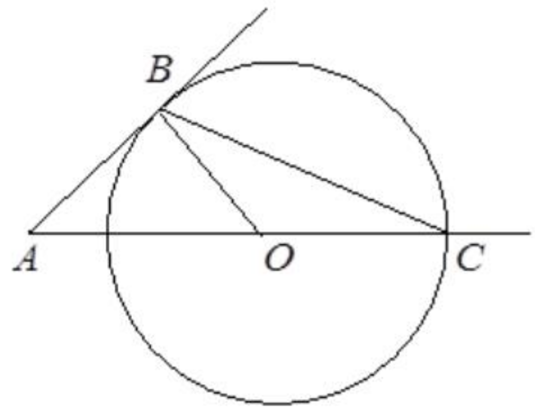
Треугольник AOB прямоугольный. По теореме Пифагора:

$AO^2 = AB^2 + OB^2$; $AO^2 = 8^2 + 1{,}8^2$;

$AO^2 = 67{,}24$; $AO = 8{,}2$.

$AC = AO + OC$, где OC – радиус, тогда

$AC = 8{,}2 + 1{,}8 = 10$.



Ответ: 10.

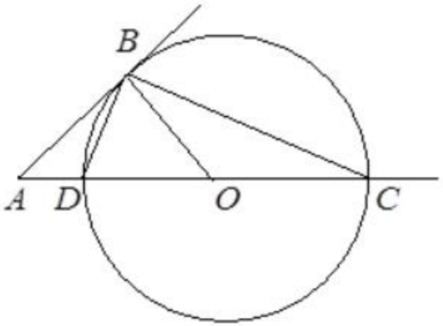
Задание 23. Пример 2. Решение 3/4

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Решение.

Треугольник BOC равнобедренный, тогда $\angle OCB = \angle OBC$.

Треугольник BOD равнобедренный, тогда $\angle ODB = \angle OBD$.



Прямая AB касается окружности в точке B, следовательно, радиус OB перпендикулярен AB.

Получаем:

$\angle ABD = 90° - \angle DBO = 90° - \angle BDC = \angle BCD$.

Треугольники ABD и ACB, имеющие общий угол BAC и равные углы ABD и BCD, подобны по двум углам, следовательно, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$.

Пусть $AC = x$, получаем: $AB^2 = AC(AC - CD)$; $64 = x(x - 3,6)$;

$x^2 - 3,6x - 64 = 0$, $x = 10$ или $x = -6,4$. Условию задачи удовлетворяет $x = 10$, $AC = 10$.

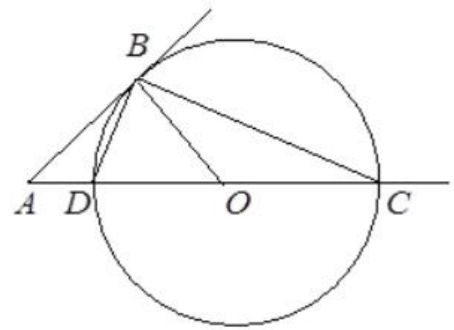
Ответ: 10.

Задание 23. Пример 2. Решение 4

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Решение.

Прямая AB является касательной, BD – секущей, следовательно, угол ABD равен половине дуги BD, заключенной внутри угла ABD, или половине центрального угла BOD.



Вписанный угол BCD, опирается на ту же дугу BD, следовательно, он равен ее половине или половине центрального угла BOD.

Получили: $\angle ABD = \angle BCD$.

Треугольники ABD и ACB, имеющие общий угол BAC и равные углы ABD и BCD, подобны по двум углам, следовательно, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$.

Пусть $AC = x$, получаем: $AB^2 = AC(AC - CD)$; $64 = x(x - 3{,}6)$;

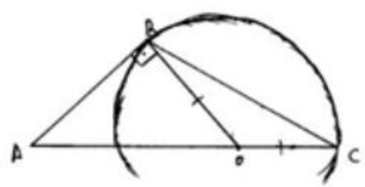
$x^2 - 3{,}6x - 64 = 0$, $x = 10$ или $x = -6{,}4$. Условию задачи удовлетворяет $x = 10$, $AC = 10$.

Ответ: 10.

Методика проверки и оценки геометрических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задание 23)

Задание 23. Пример 2. Работа 1

Дано:
т. $O \in AC$
$d = 3,6$
$AB = 8$
$AC - ?$



Решение:

т.к. окружность проходит через т. B и т. C, то OB и OC – радиусы => $OB = OC = \frac{d}{2} = 1,8$

т.к. окружность касается прямой AB в т. B => AB - касательная к окружности => $OB \perp AB$

По теореме Пифагора находим в прямоугольном треугольнике ABO гипотенузу AO.

$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2}$

$AO = \sqrt{8^2 + 1,8^2} = 8,2$

$AC = AO + OC$ (по св-ву отрезков)

$AC = 8,2 + 1,8 = 10$

Ответ: $AC = 10$.

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Ответ: 10.

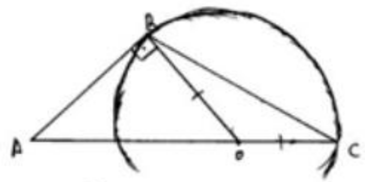
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 23. Пример 2. Работа 1

Дано:
т. $O \in AC$
$d = 3,6$
$AB = 8$

$AC - ?$



Решение:

т.к. окружность проходит через т. B и т. C, то OB и OC – радиусы => $OB = OC = \frac{d}{2} = 1,8$

т.к. окружность касается прямой AB в т. B => AB - касательная к окружности => $OB \perp AB$

По теореме Пифагора находим в [redacted] прямоугольном треугольнике ABO гипотенузу AO.

$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2}$

$AO = \sqrt{8^2 + 1,8^2} = 8,2$

$AC = AO + OC$ (по св-ву отрезков)

$AC = 8,2 + 1,8 = 10$

Ответ: $AC = 10$.

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

2 балла

Задание 23. Пример 2. Работа 2

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Ответ: 10.

Пусть ~~Вд~~ центр окр. O;

AC ∩ окружность в точках D и C

$\Rightarrow OD = OC = OB = R = 3{,}6/2$

$\angle OBA = 90°$ т.к. AB кас. $\Rightarrow$

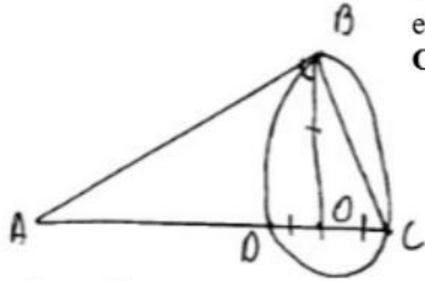
по теореме Пифагора $AO^2 = AB^2 + BO^2 = 8^2 + \left(\frac{3{,}6}{2}\right)^2 = \cancel{64 + 12{,}96 = 76{,}96} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow AC = \sqrt{76{,}96} + 3{,}6$~~

~~Ответ: $AC = \sqrt{7}$~~

$= 64 + 3{,}24 = 67{,}24 = 8{,}2^2 \Rightarrow AC = 8{,}2 + \boxed{3{,}6} = 11{,}8$

Ответ: $AC = \boxed{11{,}8}$



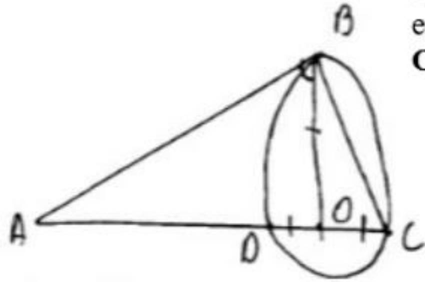
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 23. Пример 2. Работа 2

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Ответ: 10.



Пусть ~~BO~~ центр окр. O;

AC ∩ окружность в точках D и C

$\Rightarrow OD = OC = OB = R = 3{,}6/2$

$\angle OBA = 90$ т.к. AB кас. $\Rightarrow$

по теореме Пифагора $AO^2 = AB^2 + BO^2 = 8^2 + \left(\frac{3{,}6}{2}\right)^2 = \cancel{64 + 12{,}96 = 76{,}96} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow AC = \sqrt{76{,}96} + 3{,}6$~~

~~Ответ: $AC = \sqrt{7}$~~

$= 64 + 3{,}24 = 67{,}24 = 8{,}2^2 \Rightarrow AC = 8{,}2 + 3{,}6 = 11{,}8$

Ответ: $AC = 11{,}8$

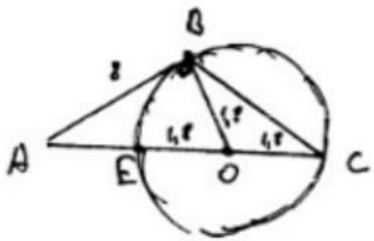
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

0 баллов

Задание 23. Пример 2. Работа 3

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Ответ: 10.



Пусть O – центр данной окружности

$\angle ABO = 90°$ по свойст. кас

$$\begin{cases} AO^2 = BO^2 + AB^2 \text{ по теор. пиф.} \\ \underset{\text{радиус}}{BO} = \frac{1}{2}\underset{\text{диамет.}}{BC} = 1{,}8 \text{ по услов.} \end{cases}$$

$AO^2 = 3{,}24 + 64 = 67{,}24$

$AO = 8{,}2$

$OC = 1{,}8$ см. это радиус.

$AC = OC + AO = 10$

Ответ: 10

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

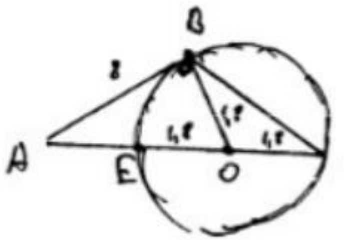
? баллов

Задание 23. Пример 2. Работа 3

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Пусть O – центр данной окружности

$\angle ABO = 90^\circ$ по свойст. кас.

$AO^2 = BO^2 + AB^2$ по теор. Пиф.

$BO = \frac{1}{2} EC = 1,8$ по услов.

радиус диаметр

$AO^2 = 3,24 + 64 = 67,24$

$AO = 8,2$

$OC = 1,8$ см. это радиус.

$AC = OC + AO = 10$

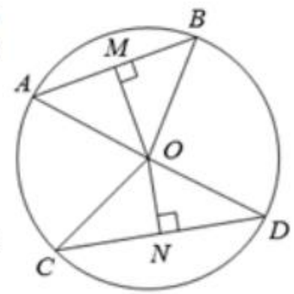
Ответ: 10

2 балла

Задание 23. Пример 3. Решение 1/3

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 14$, $CD = 48$ а расстояние от центра окружности до хорд AB равно 24.

Решение.



Пусть OM и ON — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.
Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем:

$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 25.$$

В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $CO = OB = 25$, откуда $ON = \sqrt{OC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = 7$.

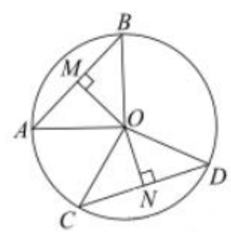
Получаем, что расстояние от центра окружности до хорд CD равно 7.
Ответ: 7.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 23. Пример 3. Решение 2/3

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 14$, $CD = 48$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 24.

Решение.



Рассмотрим треугольники AOM и BOM, они прямоугольные, стороны AO и BO равны как радиусы окружностей, OM — общая, следовательно, треугольники AOM и BOM равны, откуда

$$AM = BM = \frac{AB}{2} = 7.$$

Аналогично равны треугольники CON и DON, откуда

$$CN = ND = \frac{CD}{2} = 24.$$

Рассмотрим треугольник MOB, найдем OB по теореме Пифагора.

$$OB = \sqrt{OM^2 + MB^2} = 25.$$

Рассмотрим треугольник OND, он прямоугольный.
По теореме Пифагора найдем ON.

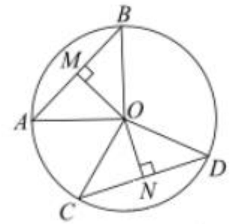
$$ON = \sqrt{OD^2 - ND^2} = 7.$$

Таким образом, расстояние от центра окружности до хорды CD равно 7.

Задание 23. Пример 3. Решение 3

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 14$, $CD = 48$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 24.

Решение.



Рассмотрим треугольники AOM и BOM, они прямоугольные, стороны AO и BO равны как радиусы окружностей, OM — общая, следовательно, треугольники AOM и BOM равны, откуда

$$AM = BM = \frac{AB}{2} = 7.$$

Аналогично равны треугольники CON и DON, откуда

$$CN = ND = \frac{CD}{2} = 24.$$

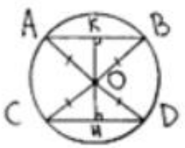
Рассмотрим прямоугольные треугольники OND и BMO:
гипотенузы $OD = OB$ как радиусы;
катеты $DN = OM = 24$, следовательно, прямоугольные треугольники OND и BMO равны, откуда получаем: $ON = BM = 7$.
Таким образом, расстояние от центра окружности до хорды CD равно 7.
Ответ: 7.

Задание 23. Пример 3. Работа 1

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 14$, $CD = 48$ а расстояние от центра окружности до хорд AB равно 24.

Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Дано: окр; AB и CD - хорды; $AB=14$, $CD=48$, $OK=24$

Найти: OH.

Решение:

$\triangle AOB$: Проведем $OK \perp AB$; $OK=24$.

$\triangle AOB$ - равнобедренный; т.к. $AO=OB=R$ (радиусы) $\Rightarrow$ OK - высота, медиана, биссектриса; $AK=KB=14:2=7$.

$OB^2=7^2+24^2$

$OB^2=49+576$

$OB^2=625$

$OB=25$

Т.к. $AO=OB=CO=OD$, то $AO=OB=CO=OD=25$.

$\triangle COD$. Проведем $OH \perp CD$.

$\triangle COD$ - равнобедренный, т.к. $CO=OD=R$ (радиусы) $\Rightarrow$ OH - высота, медиана, биссектриса; $CH=HD=48:2=24$.

$OH^2=25^2-24^2$

$OH^2=625-576$

$OH^2=49$

$OH=7$

Ответ: 7.

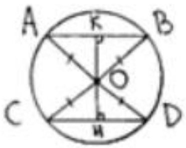
? баллов

Задание 23. Пример 3. Работа 1

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 14$, $CD = 48$ а расстояние от центра окружности до хорд AB равно 24.

Ответ: 7

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Дано: окр; AB и CD - хорды; AB=14, CD=48, OK=24

Найти: OH.

Решение:

$\triangle AOB$: Проведем $OK \perp AB$; $OK=24$.

$\triangle AOB$ - равнобедренный; т.к. $AO=OB=R$ (радиусы) $\Rightarrow$ OK - высота, медиана, биссектриса; $AK=KB=14:2=7$.

$OB^2=7^2+24^2$

$OB^2=49+576$

$OB^2=625$

$OB=25$

Т.к. $AO=OB=CO=OD$, то $AO=OB=CO=OD=25$.

$\triangle COD$. Проведем $OH \perp CD$.

$\triangle COD$ - равнобедренный, т.к. $CO=OD=R$ (радиусы) $\Rightarrow$ OH - высота, медиана, биссектриса; $CH=HD=48:2=24$.

$OH^2=25^2-24^2$

$OH^2=625-576$

$OH^2=49$

$OH=7$

Ответ: 7.

2 балла

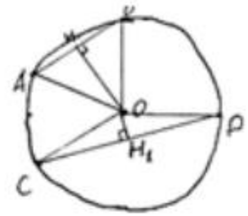
Задание 23. Пример 3. Работа 2

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 14$, $CD = 48$ а расстояние от центра окружности до хорд AB равно 24.

Ответ: 7

Дано:
$\omega(O;R)$ – окружность
AB – хорда
CD – хорда
$AB = 14$
$CD = 48$
$OH \perp AB$
$OH_1 \perp CD$
$OH = 24$

$OH_1 = ?$



1) $AO = OB = OC = OD$ (радиусы)
2) из п. 1 $\Rightarrow \triangle AOB$ и $\triangle COD$ – равнобедренные
3) из п. 2 $\Rightarrow OH$ и OH_1 – медианы (высоты, проведённые к основанию равнобедренного треугольника) $\Rightarrow AH = \frac{14}{2} = 7$
4) Из $\triangle AOH$, по теореме Пифагора:
$AO^2 = AH^2 + OH^2 = 576 + 49 = 625$
$AO = 25$
5) из п. 1 и п. 4 $\Rightarrow CO = 25$
6) Из $\triangle COH_1$, по теореме Пифагора:
$OH_1^2 = CO^2 - CH_1^2 = 625 - 576 = 49$
$OH_1 = 7$

Ответ: $OH_1 = 7$

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

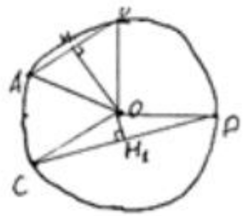
? баллов

Задание 23. Пример 3. Работа 2

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB=14$, $CD=48$ а расстояние от центра окружности до хорд AB равно 24.

Ответ: 7

Дано:
$\omega(O;R)$ – Окружность
AB – хорда
CD – хорда
$AB = 14$
$CD = 48$
$OH \perp AB$
$OH_1 \perp CD$
$OH = 24$
$OH_1 = ?$



1) $AO = OB = OC = OD$ (радиусы)
2) из п. 1 $\Rightarrow \triangle AOB$ и $\triangle COD$ – равнобедренные
3) из п. 2 $\Rightarrow OH$ и OH_1 – медианы (высоты, проведённые к основанию равнобедренного треугольника) $\Rightarrow AH = \frac{14}{2} = 7$
4) Из $\triangle AOH$, по теореме Пифагора:
$AO^2 = AH^2 + OH^2 = 576 + 49 = 625$
$AO = 25$
5) из п. 1 и п. 4 $\Rightarrow CO = 25$
6) Из $\triangle COH_1$, по теореме Пифагора:
$OH_1^2 = CO^2 - CH_1^2 = 625 - 576 = 49$
$OH_1 = 7$
Ответ: $OH_1 = 7$

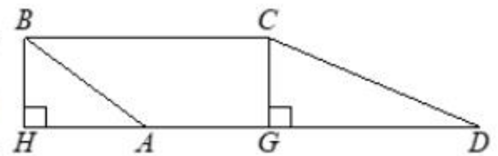
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

2 балла

Задание 23. Пример 4. Решение

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 135°, а $CD = 17$.

Решение.



Проведём перпендикуляры $BH = CG$ к прямой AD.

В прямоугольном треугольнике CDG угол GCD равен 45°, следовательно, $CG = CD \cdot \cos 45^\circ = \frac{17\sqrt{2}}{2}$.

В прямоугольном треугольнике ABH катет $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$, а угол ABH равен 60°. Значит, $AB = \frac{BH}{\cos 60^\circ} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$.

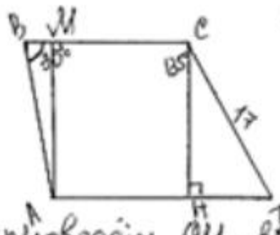
Ответ: $17\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 23. Пример 4. Работа 1

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $135°$, а $CD = 17$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.



Дано: $\boxed{ABCD - \text{тр}}$; $\angle ABC = 30°$; $\angle BCD = 135°$; $CD = 17$

Найти: AB

Решение:

Д.п. проведём CH - высота к основанию AD $\Rightarrow$ $\angle CHD = \angle BCH = 90°$ $\Rightarrow \angle HCD = 135° - 90° = 45°$

Р/см $\triangle CHD$ по теореме о сумме $\angle \triangle \Rightarrow \angle CDH = 180° - 90° - 45° = 45°$

$\Rightarrow$ т.к $\angle HCD = \angle CDH = 45° \Rightarrow \triangle CHD$ - р/б $\Rightarrow CH = HD$

Д п проведем высоту AM к основанию BC

Р/м $\triangle ABM$. т.к. $\angle MBA = 30° \Rightarrow$ по св-ву катета лежащего напротив $\angle 30° \Rightarrow$ катет равен половине гипотенузы $\Rightarrow AM = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = 2\,AM$

$\boxed{AM = CH \text{ - высота}}$; $\Rightarrow AB = 2 \cdot CH$

Р/м $\triangle CHD$. по теореме Пифагора $\Rightarrow$

$CH^2 + HD^2 = CD^2$; $2CH^2 = CD^2$; $CH^2 = \frac{CD^2}{2}$,

$CH = \sqrt{\frac{CD^2}{2}}$; Р/м $\triangle ABM$; $AB = 2\,CH = 2 \cdot \sqrt{\frac{CD^2}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{4 \cdot CD^2}{2}} = \sqrt{2\,CD^2} = \sqrt{2 \cdot 17^2} = \boxed{\sqrt{2 \cdot 289}} = 17\sqrt{2}$

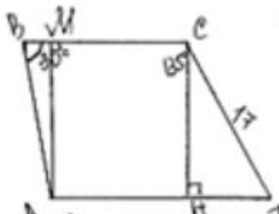
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 23. Пример 4. Работа 1

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $135°$, а $CD = 17$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.



Дано: $\boxed{ABCD - тр}$; $\angle ABC = 30°$; $\angle BCD = 135°$; $CD = 17$

Найти: AB

Решение:

Д.п. проведем CH - высота к основанию AD ⇒ $\angle CHD = \angle BCH = 90°$ ⇒ $\angle HCD = 135° - 90° = 45°$

Р/м $\triangle CHD$ по теореме о сумме $\angle \triangle$ ⇒ $\angle CDH = 180° - 90° - 45° = 45°$

⇒ т.к $\angle HCD = \angle CDH = 45°$ ⇒ $\triangle CHD$ – р/б ⇒ $CH = HD$

Д.п проведем высоту AM к основанию BC

Р/м $\triangle ABM$ т.к. $\angle MBA = 30°$ ⇒ по св-ву катета лежащего напротив $\angle 30°$ ⇒ катет равен половине гипотенузы ⇒ $AM = \frac{1}{2} AB$ ⇒ $AB = 2 AM$

$\boxed{AM = CH - высота}$; ⇒ $AB = 2 \cdot CH$

Р/м $\triangle CHD$ по теореме Пифагора ⇒ $CH^2 + HD^2 = CD^2$; $2CH^2 = CD^2$; $CH^2 = \frac{CD^2}{2}$;

$CH = \sqrt{\frac{CD^2}{2}}$; Р/м $\triangle ABM$; $AB = 2\,CH = 2 \cdot \sqrt{\frac{CD^2}{2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot CD^2}{2}} = \sqrt{2CD^2} = \sqrt{2 \cdot 17^2} = \boxed{\sqrt{2 \cdot 289}} = 17\sqrt{2}$

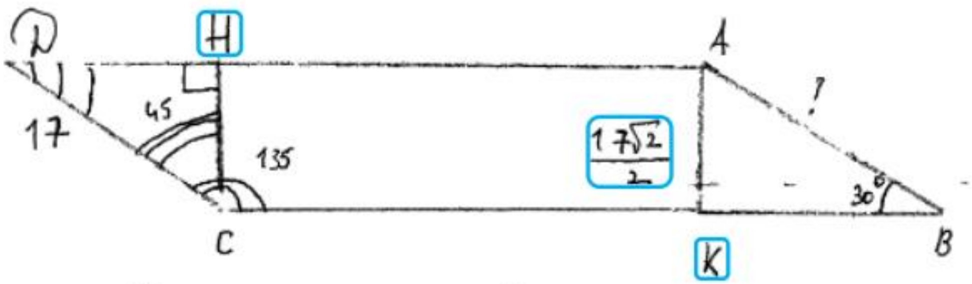
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

2 балла

Задание 23. Пример 4. Работа 2

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $135°$, а $CD = 17$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.



$\angle DCH = 135 - 90 = 45°$

ΔDHC – МБ $\Rightarrow DH = HC = x$ $\quad \boxed{x^2 + x^2 = 17^2}$

$2x^2 = 289 \Rightarrow x = \frac{17\sqrt{2}}{2}$

$\Delta AKB \Rightarrow AB = \boxed{2 \cdot \frac{17\sqrt{2}}{2}} = 17\sqrt{2}$

Ответ: $17\sqrt{2}$

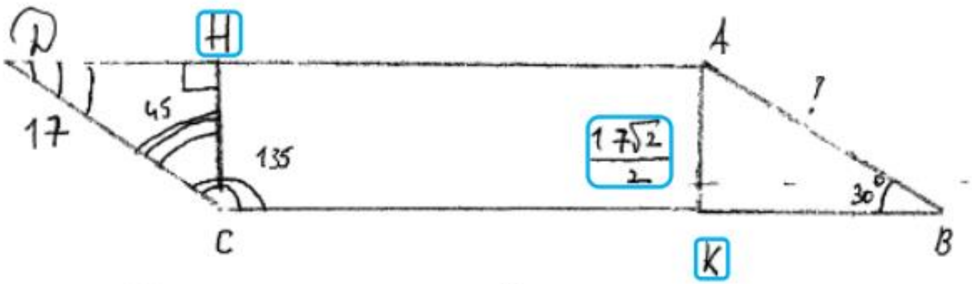
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 23. Пример 4. Работа 2

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 30° и 135°, а $CD = 17$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.



$\angle DCH = 135 - 90 = 45^\circ$

ΔDHC – МБ $\Rightarrow DH = HC = x$ $\boxed{x^2 + x^2 = 17^2}$

$2x^2 = 289 \Rightarrow x = \frac{17\sqrt{2}}{2}$

$\Delta AKB \Rightarrow AB = \boxed{2 \cdot \frac{17\sqrt{2}}{2}} = 17\sqrt{2}$

Ответ: $17\sqrt{2}$

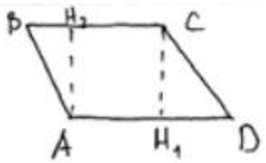
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

0 баллов

ФИПИ

Методика проверки и оценки геометрических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задание 23)

Задание 23. Пример 4. Работа 3



Дано: $\angle ABC=30°$, $\angle BCD=135°$,

$CD=17$, $\boxed{CH_1=AH_2=h}$

AB - ?

Решение: $\angle BCH_1=90°$

$\angle BCD=\angle BCH_1+\angle DCH_1 \Rightarrow \angle DCH_1=\angle BCD-\angle BCH_1$

$\angle DCH_1=135°-90°=45° \Rightarrow \angle D=180°-90°-45°=45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCH_1=\angle D \Rightarrow \triangle CH_1D$ - равнобедренный (CD - основание)

$CH_1=DH_1$ (стороны при основании равнобедренного треугольника) $=x$

$\boxed{x^2+x^2=17^2}$

$2x^2=289$

$x^2=144{,}5$

$x=\sqrt{144{,}5}$

$CH_1=\sqrt{144{,}5} \Rightarrow AH_2=\sqrt{144{,}5}$ (высота равна)

$AH_2=\frac{1}{2}AB$ (катет, лежащий напротив угла в $30°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB=2AH_2$

$AB=2\sqrt{144{,}5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{144{,}5}=\sqrt{578}$

Ответ: $AB=\boxed{\sqrt{578}}$

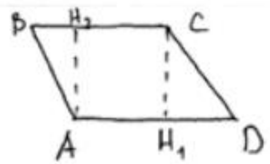
Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $135°$, а $CD=17$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 23. Пример 4. Работа 3



Дано: $\angle ABC = 30°$, $\angle BCD = 135°$,
$CD = 17$, $\boxed{CH_1 = AH_2 = h}$

AB - ?

Решение: $\angle BCH_1 = 90°$

$\angle BCD = \angle BCH_1 + \angle DCH_1 \Rightarrow \angle DCH_1 = \angle BCD - \angle BCH_1$

$\angle DCH_1 = 135° - 90° = 45° \Rightarrow \angle D = 180° - 90° - 45° = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCH_1 = \angle D \Rightarrow \triangle CH_1D$ - равнобедренный (CD - основание)

$CH_1 = DH_1$ (стороны при основании равнобедренного треугольника) $= x$

$\boxed{x^2 + x^2 = 17^2}$

$2x^2 = 289$

$x^2 = 144{,}5$

$x = \sqrt{144{,}5}$

$CH_1 = \sqrt{144{,}5} \Rightarrow AH_2 = \sqrt{144{,}5}$ (высоты равны)

$AH_2 = \frac{1}{2} AB$ (катет, лежащий напротив угла в $30°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 2\,AH_2$

$AB = 2\sqrt{144{,}5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{144{,}5} = \sqrt{578}$

Ответ: $AB = \boxed{\sqrt{578}}$

Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $135°$, а $CD = 17$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.

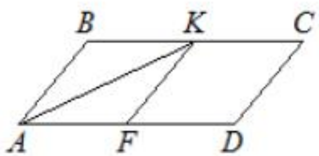
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

1 балл

Задание 24. Пример 1. Решение 1/3

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Доказательство.



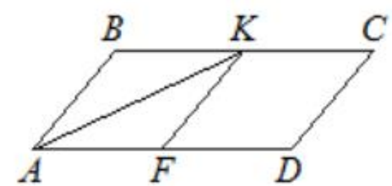
Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 24. Пример 1. Решение 2/3

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Доказательство.

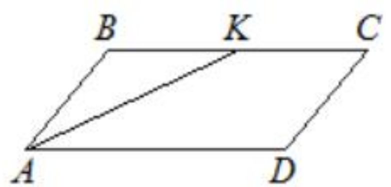


Проведём прямую KF параллельно стороне AB. Четырехугольник $ABKF$ – параллелограмм, прямые AB и KF параллельны, прямые AF и BK параллельны. Поскольку $BK = \frac{1}{2}BC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD.

Задание 24. Пример 1. Решение 3

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Доказательство.



Треугольник ABK равнобедренный, поскольку $BK = \frac{1}{2}BC = AB$, тогда углы BAK и BKA равны.

Углы BAK и KAD равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK.

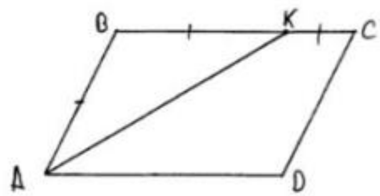
Получили: $\angle BAK = \angle BKA$ и $\angle BKA = \angle KAD$, следовательно, $\angle BAK = \angle KAD$. Значит, AK — биссектриса угла BAD.

Задание 24. Пример 1. Работа 1

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Дано:
ABCD-параллелограмм
BC=2AB
K-середина BC

Доказать:
AK-биссектриса угла BAD



Доказательство:

Т.к. K-середина BC, то BK=KC =>
BK=½BC=AB => △ABK-равнобедренный
∠BAK=∠BKA (по св-ву равнобедренного треугольника)

Рассмотрим углы BKA и KAD:
∠BKA=∠KAD (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK).
∠BAK=∠BKA=∠KAD =>
∠BAK=∠KAD => AK-биссектриса ∠BAD
(по признаку)
ч.т.д.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

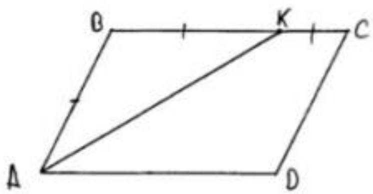
? баллов

Задание 24. Пример 1. Работа 1

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Дано:
ABCD-параллелограмм
BC=2AB
K-середина BC

Доказать:
AK-биссектриса угла BAD



Доказательство:
Т.к. K-середина BC, то BK=KC =>
BK=$\frac{1}{2}$BC=AB => △ABK-равнобедренный
∠BAK=∠BKA (по св-ву равнобедренного треугольника)

Рассмотрим углы BKA и KAD:
∠BKA=∠KAD (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK).
∠BAK=∠BKA=∠KAD =>
∠BAK=∠KAD => AK-биссектриса ∠BAD (по признаку)
Ч.т.д.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

2 баллов

Задание 24. Пример 1. Работа 2

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

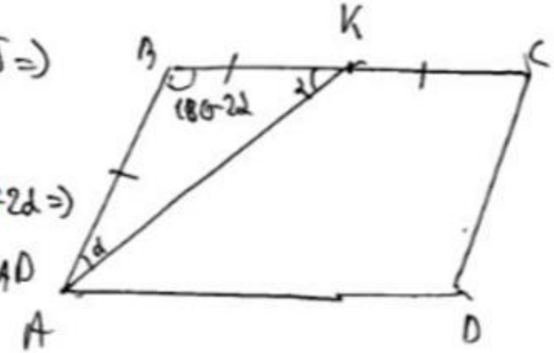
Пусть $AB=a \Rightarrow BC=2a \Rightarrow BK=a \Rightarrow \triangle ABK$ р/б $\Rightarrow$

$\angle BAK=\angle BKA=\alpha \Rightarrow \angle ABK=180-2\alpha$

т.к. $BC \parallel AD \Rightarrow \boxed{\angle BAD+\angle ABK=180} \Rightarrow \angle BA\boxed{K}=2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KAD=\alpha \Rightarrow \angle BAK=\angle KAD \Rightarrow AK$ бис. $\angle BAD$

□



Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 24. Пример 1. Работа 2

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

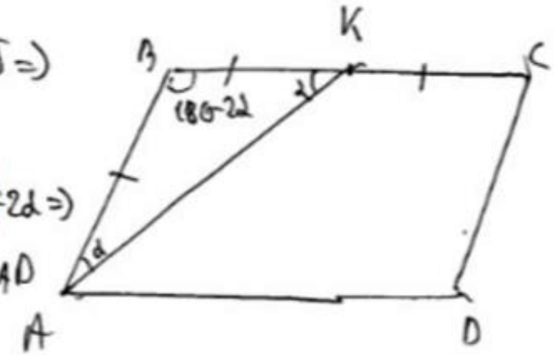
Пусть $AB=a \Rightarrow BC=2a \Rightarrow BK=a \Rightarrow \triangle ABK$ р/б $\Rightarrow$

$\angle BAK=\angle BKA=\alpha \Rightarrow \angle ABK=180-2\alpha$

т.к. $BC \parallel AD \Rightarrow \boxed{\angle BAD+\angle ABK=180} \Rightarrow \angle BA\boxed{K}=2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KAD=\alpha \Rightarrow \angle BAK=\angle KAD \Rightarrow AK$ бис. $\angle BAD$

□

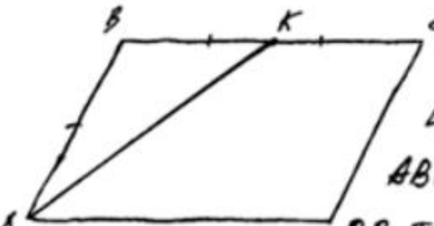


Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

0 баллов

Задание 24. Пример 1. Работа 3

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.



Пусть $\angle ABK = \alpha$, тогда $\angle ADC = \alpha$, $\angle BAD = \angle BCD = 180 - \alpha$, так как $ABCD$ — параллелограмм. $AB = BK$ так как $BC = 2AB$ и $BK = \frac{1}{2}BC$.

Значит $\boxed{\angle BAK = \angle BKA} = (180 - \alpha) : 2 = 90 - \frac{1}{2}\alpha$. ~~Значит~~ Тогда $\angle KAD = 180 - \alpha - (90 - \frac{1}{2}\alpha) = 90 - \frac{1}{2}\alpha$ значит $\angle KAD = \angle BAK$.

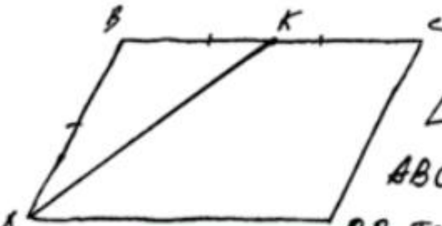
Тогда AK — биссектриса $\angle BAD$.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 24. Пример 1. Работа 3

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.



Пусть $\angle ABK = \alpha$, тогда $\angle ADC = \alpha$, $\angle BAD = \angle BCD = 180 - \alpha$, так как $ABCD$ – параллелограмм. $AB = BK$ так как $BC = 2AB$ и $BK = \frac{1}{2}BC$.

Значит $\boxed{\angle BAK = \angle BKA} = (180-\alpha):2 = 90 - \frac{1}{2}\alpha$. ~~Значит~~ Тогда $\angle KAD = 180 - \alpha - (90 - \frac{1}{2}\alpha) = 90 - \frac{1}{2}\alpha$ значит $\angle KAD = \angle BAK$.

Тогда AK – биссектриса $\angle BAD$.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

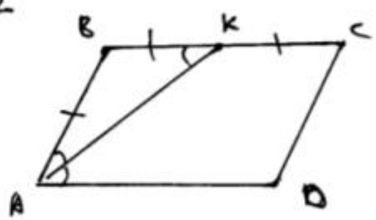
1 балл

Задание 24. Пример 1. Работа 4

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Дано: ABCD – параллелогр.
BC = 2AB
BK = KC



$BK = \frac{1}{2} BC = AB$ по усл.
$\triangle ABK$ – равноб.
$\angle BAK = \angle BKA$ по опр. рав. тр.
$\angle BKA = \angle KAD$ как внутр. накрест. леж.
$\Downarrow$
$\angle BAK = \angle KAD$
$\Downarrow$
AK – биссектриса
Ч.Т.Д.

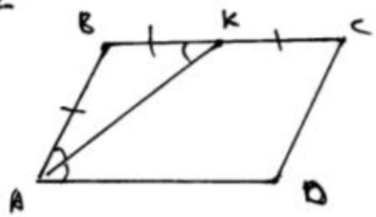
? баллов

Задание 24. Пример 1. Работа 4

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Дано: ABCD – паралелогр.
BC = 2AB
BK = KC



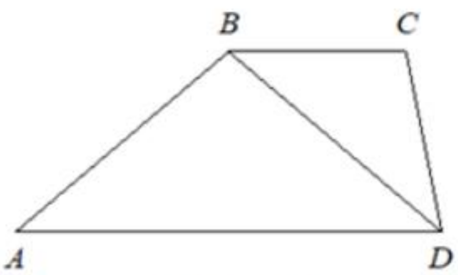
BK = $\frac{1}{2}$ BC = AB по усл.
△ABK – равноб.
∠BAK = ∠BKA по св-у рав. тр.
∠BKA = ∠KAD как внутр. накрест. леж.
⇓
∠BAK = ∠KAD
⇓
AK – биссектриса
Ч.Т.Д.

0 баллов

Задание 24. Пример 2. Решение

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD = 6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство.



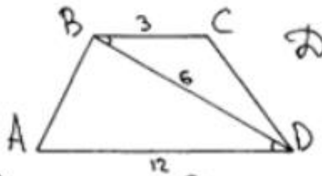
В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$. Поэтому треугольники CBD и BDA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 24. Пример 2. Работа 1

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD = 6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Дано: $ABCD$; $AB \nparallel CD$, $BC \parallel AD$; $BC=3$; $AD=12$; $BD=6$.

Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$.

Доказательство:

$\triangle CBD \sim \triangle BDA$ (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними): $\angle ADB = \angle CBD$ (накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и BD-секущая).

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC} = k$$

$$\frac{12}{6} = \frac{6}{3} = k$$

$$k = \boxed{2 = 2}$$

Значит, $\triangle CBD \sim \triangle BDA$.

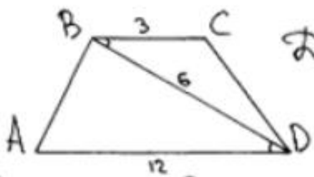
ч.т.д

? баллов

Задание 24. Пример 2. Работа 1

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD = 6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Дано: $ABCD$; $AB \nparallel CD$, $BC \parallel AD$; $BC=3$; $AD=12$; $BD=6$.

Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$.

Доказательство:

$\triangle CBD \sim \triangle BDA$ (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними): $\angle ADB = \angle CBD$ (накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и BD-секущая).

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC} = k$$

$$\frac{12}{6} = \frac{6}{3} = k$$

$$k = \boxed{2 = 2}$$

Значит, $\triangle CBD \sim \triangle BDA$.

ч.т.д

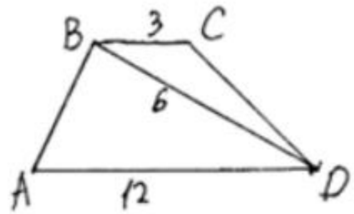
2 балла

Задание 24. Пример 2. Работа 2

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD = 6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Дано:
$ABCD$ – трап.
$BC \parallel AD$
$BC = 3$
$AD = 12$
$BD = 6$

Т.д.:
$\triangle CBD \sim \triangle BDA$



1) $\angle BDA = \angle CBD$ (т.к. н/л при $BC \parallel AD$ и секущей BD)

2) $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC}$ $\left(\frac{12}{6} = \frac{6}{3}\right)$

3) И п.1 и п.2 $\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle BDA$ (по равному углу и 2 соответственным сторонам)

ч.т.д.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Задание 24. Пример 2. Работа 2

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD = 6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Дано:

ABCD - трап.

$BC \parallel AD$

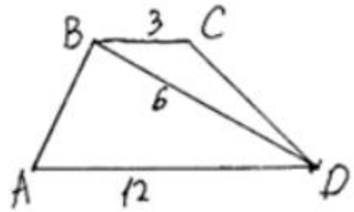
$BC = 3$

$AD = 12$

$BD = 6$

Т.д.:

$\triangle CBD \sim \triangle BDA$



1) $\angle BDA = \angle CBD$ (т.к. н/л при $BC \parallel AD$ и секущей BD)

2) $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC}$ $\left(\frac{12}{6} = \frac{6}{3}\right)$

3) Из п.1 и п.2 $\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle BDA$ (по равному углу и 2 соответственным сторонам) ч.т.д.

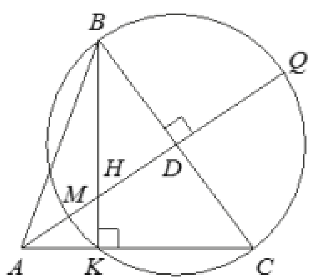
2 балла

Задание 25. Пример 1

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Решение.

Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рис.). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC, точка K лежит на стороне AC.



Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q. Тогда $DQ = MD = 3$.

По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = (AD - MD) \cdot (AD + MQ) = \\ = 6 \cdot 12 = 72.$$

Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что

$\dfrac{AK}{AH} = \dfrac{AD}{AC}$, откуда $AK \cdot AC = AD \cdot AH = 9AH$.

Значит, $9AH = 72$. Следовательно, $AH = 8$.

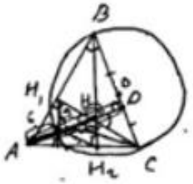
Ответ: 8.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 25. Пример 1. Работа 1

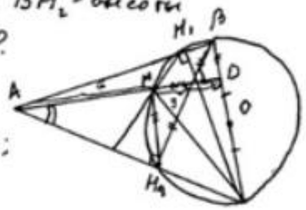
На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.



Дано:
$\triangle ABC$; ~~B - острый~~ O - окружность
$BC = d$
$AB = 9$ $MD = 3$
точ. H - точка пересечения высот
AD; CH_1; BH_2 - высоты
Найти: $AH = ?$

Решение:



$\triangle ABC$ - данный треугольник;
BC - диаметр окружности O.
$AD = 9$; $MD = 3$
$AM = AD - MD = 9 - 3 = 6$ (по аксиоме измерения отрезков).
Доп. Построения.
Построю ~~эти~~ отрезок MC.
Рассмотрю $\triangle AH_1H$ и $\triangle DCM$.
они подобны по 1-ому признаку подобия треугольников.
Значит $K = \frac{AD}{MC} = \frac{H_1H}{DM} = \frac{AB}{DC}$.
$K = \frac{9}{MC} = \frac{H_1H}{3} = \frac{AB}{DC} = K$

Пусть $MH = x$ см $x > 0$, тогда $AH = x + 6$ см.
~~Рассмотрю $\triangle ABD$ и $\triangle ABH_1$~~
~~Они подобны, значит $K = 1,5$.~~
Рассмотрю $\triangle HBD$ и $\triangle MH_2H$.
Они равны по 1-ому признаку равенства $\triangle$.
($\angle MHH_2 = \angle BHC$ как вертикальные)
($H_2H = BH$; $H_1H = CH$)
Следовательно $MD = MH + HD = 3 : 2 = 1,5$.
$AH = AM + MH$.
$6 + 1,5 = 7,5$ (по аксиоме измерения отрезков)
Ответ: 7,5 см.

$6 + 2x = 9$
$x = 1,5$
$AH = 7,5$

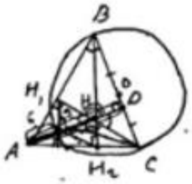
Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

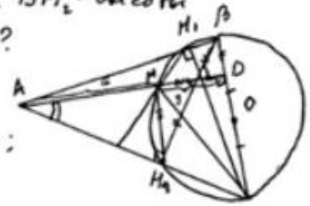
Задание 25. Пример 1. Работа 1

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.



Дано:
△ABC; ~~B - острый~~ O - окружность
BC = d
AB = 9   MD = 3
точк H - точка пересечения высот
AD; CH₁; BH₂ - высоты
Найти: AH = ?



Решение:
△ABC - данный треугольник;
BC - диаметр окружности O.
AD = 9; MD = 3
AH = AD - MD = 9 - 3 = 6 (по аксиоме измерения отрезков).
Доп. Построение.
Построю ~~отр~~ отрезок HC.
Рассмотрю △AH₁H и △DCH.
Они подобны по 1-ому признаку подобия треугольников.
Значит $K = \frac{AD}{HC} = \frac{H_1H}{DM} = \frac{AB}{DC}$.
$K = \frac{9}{HC} = \frac{H_1H}{3} = \frac{AB}{DC} = K$

Пусть MH = x см x > 0, тогда AH = x + 6 см.
~~Рассмотрю △ABD и △ABH₁~~
~~Они подобны, значит K = 1,5.~~
Рассмотрю △HBD и △HH₂H.
Они равны по 1-ому признаку равенства △.
(∠HHH₂ = ∠BHC как вертикальные)
(H₂H = BH ; H₁H = CH)
Следовательно MD = MH + HD = 3 : 2 = 1,5.
AH = AM + MH.
6 + 1,5 = 7,5 (по аксиоме измерения отрезков)
Ответ: 7,5 см.

6 + 2x = 9
x = 1,5
AH = 7,5

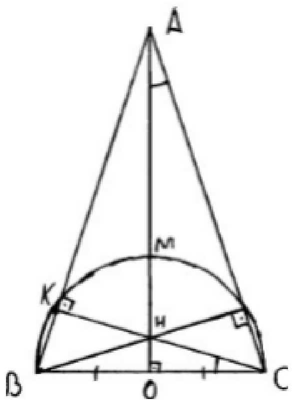
0 баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 25. Пример 1. Работа 2

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.



Решение:

т. M делит отрезок AD в отношении $\frac{AM}{MD} = \frac{AD-MD}{MD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, считая от вершины

=> т. M - точка пересечения медиан $\triangle ABC$. ~~но так.~~

AM - медиана $\triangle ABC$, но т.к. $AM \in AD$, то есть AD является и высотой, и медианой $\triangle ABC$ одновременно =>

$\triangle ABC$ - равнобедренный (по признаку).

Рассмотрим $\triangle AOC$ и $\triangle CKB$. [redacted]

$\angle KBO = \angle OCA$ (по св-ву равнобедренного треугольника)

$\angle AOC = \angle CKB = 90°$ =>

$\triangle AOC \sim \triangle CKB$ (по двум углам).

Рассмотрим $\triangle CKB$ и $\triangle CDH$:

[redacted] $\angle KCB$ - общий;

$\angle BKC = \angle HDC = 90°$ =>

$\triangle CKB \sim \triangle CDH$.

Т.к. $\left.\begin{array}{l}\triangle AOC \sim \triangle CKB,\\ \triangle CKB \sim [redacted] \triangle CDH\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOC \sim \triangle CDH$ (по

т.к. $\triangle AOC \sim \triangle CDH$, то => $\frac{DC}{AD} = \frac{HD}{DC}$ =>

$DC^2 = AD \cdot HD$; $HD = \frac{DC^2}{AD}$; $HD = \frac{3^2}{9} = 1$

$AH = AD - HD$ (по св-ву отрезков)

$AH = 9 - 1 = 8$

Ответ: 8.

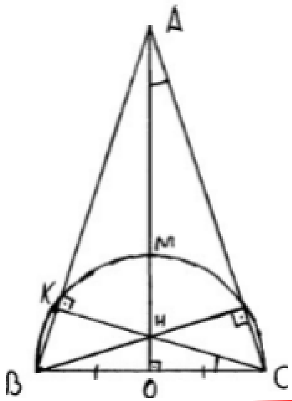
? баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 25. Пример 1. Работа 2

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \ne AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.



Решение:

т. M делит отрезок AD в отношении $\frac{AM}{MD} = \frac{AD-MD}{MD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, считая от вершины

$\Rightarrow$ т. M - точка пересечения медиан $\triangle ABC$. ~~но так~~

AM - медиана $\triangle ABC$, но т.к. $AM \in AD$, то есть AD является и высотой, и медианой $\triangle ABC$ одновременно $\Rightarrow$

$\triangle ABC$ - равнобедренный (по признаку).

Рассмотрим $\triangle AOC$ и $\triangle CKB$. [redacted]

$\angle KBO = \angle OCA$ (по св-ву равнобедренного треугольника)

$\angle AOC = \angle CKB = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle AOC \sim \triangle CKB$ (по двум углам)

Рассмотрим $\triangle CKB$ и $\triangle CDH$:

[redacted] $\angle KCB$ - общий;

$\angle BKC = \angle HDC = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle CKB \sim \triangle CDH$.

Т.к. $\triangle AOC \sim \triangle CKB$, $\triangle CKB \sim$ [redacted] $\triangle CDH$ $\Rightarrow \triangle AOC \sim \triangle CDH$ (по

т.к. $\triangle AOC \sim CDH$, то $\Rightarrow \frac{DC}{AD} = \frac{HD}{DC} \Rightarrow$

$DC^2 = AD \cdot HD$; $HD = \frac{DC^2}{AD}$; $HD = \frac{3^2}{9} = 1$

$AH = AD - HD$ (по св-ву отрезков)

$AH = 9 - 1 = 8$

Ответ: 8.

0 баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 25. Пример 1. Работа 3

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.

1) дополним полуокружность до окружности $\omega(O;R)$

2) $BA \cap \omega = H_1$; $AC \cap \omega = H_2$; $AD \cap \omega = M; K$

3) т.к. BC диаметр $\Rightarrow \angle BH_1C = \angle BH_2C = 90 \Rightarrow$

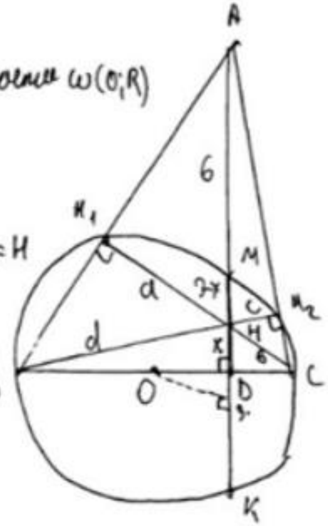
CH_1 и BH_2 высоты $\triangle ABC \Rightarrow AD \cap BH_2 \cap CH_1 = H$

пусть $DH = x$;

4) проведем сер. $\perp$ MK $\Rightarrow$ он проходит через O

$\Rightarrow$ сер $\perp \parallel BC$ но они $\cap$ BO $\Rightarrow$ BC проходит через сер $MK \Rightarrow MD = DK = 3$

5) пусть $H_1H = a$; $HC = b$; $HH_2 = c$; $BH = d$



$\triangle H_1HA \sim \triangle DHC$ т.к. $\angle ADC = 90 = \angle AH_1C$; $\angle H_1HA = \angle DHC \Rightarrow$

$\frac{a}{x} = \frac{9-x}{b} \Rightarrow ab = (9-x)x$

~~аналогично~~ по теореме о произведении секущих

$ab = (3-x)(3+x) = 9 - x^2 \Rightarrow 9x - x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$

Ответ: $AH = 9 - 1 = 8$

? баллов

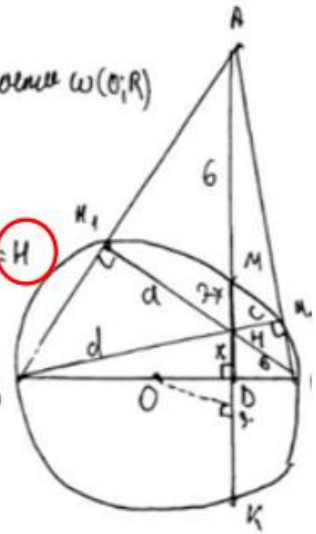
Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 25. Пример 1. Работа 3

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.

1) дополним полуокружность до окружности $\omega(O;R)$
2) $BA \cap \omega = H_1$; $AC \cap \omega = H_2$; $AD \cap \omega = M; K$
3) т.к. BC диаметр $\Rightarrow \angle BH_1C = \angle BH_2C = 90 \Rightarrow$
CH_1 и BH_2 высоты $\triangle ABC \Rightarrow AD \cap BH_2 \cap BH_1 = H$
пусть $DH = x$;
4) проведем сер. ⊥ MK ⇒ он проходит через O
⇒ сер ⊥ $\parallel BC$ но они $\cap$ BO ⇒ BC проходит
через сер $MK \Rightarrow MD = DK = 3$
5) пусть $H_1H = a$; $HC = b$; $HH_2 = c$; $BH = d$



$\triangle H_1HA \sim \triangle DHC$ т.к. $\angle ADC = 90 = \angle AH_1C$; $\angle H_1HA = \angle DHC \Rightarrow$

$\frac{a}{x} = \frac{9-x}{b} \Rightarrow ab = (9-x)x$

аналогично по теореме о произведение секущих

$ab = (3-x)(3+x) = 9 - x^2 \Rightarrow 9x - x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$

Ответ: $AH = 9 - 1 = 8$

2 балла

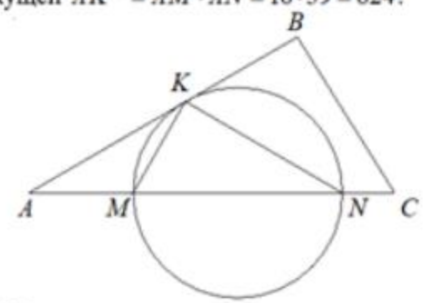
Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 25. Пример 2

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

Решение.

Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN = 16 \cdot 39 = 624$.



По теореме косинусов

$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK\cos\angle BAC = 256 + 624 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{624} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = 256$.

Значит, $KM = 16$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.

Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

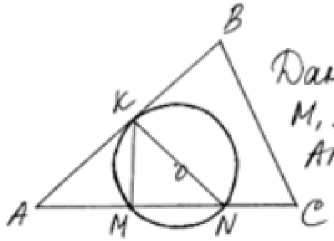
$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{16}{2\sqrt{1 - \frac{39}{64}}} = 12{,}8.$$

Ответ: 12,8.

Задание 25. Пример 2. Работа 1

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

Ответ: 12,8.



Дано: $\triangle ABC$.
$M, N \in AC$.
$AM = 16$; $AN = 39$
$M, N \in \omega(O; r)$
K – точка касания
$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$
Найти: r – ?

Решение:

1. $AK^2 = AM \cdot AN$ (по теореме о касательной и секущей)
$AK^2 = 16 \cdot 39 = 624$.

2. Рассмотрим $\triangle AKN$.
$\angle KAN = \frac{1}{2} \cup KM$ (по теореме об угле между секущей и касательной)
$\angle KNM = \frac{1}{2} \cup KM$ (вписанный угол) $\Rightarrow \triangle AKN$ – р/б.

$KN = AK$
$\cos\angle BAC = \cos\angle KNM$.

3. Рассмотрим $\triangle KMN$: ($MN = AN - AM = 39 - 16 = 23$)
$KM^2 = KN^2 + MN^2 - 2KM \cdot KN \cdot \cos\angle KNM$.
$KM = \sqrt{624 + 529 - 2 \cdot 23 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \sqrt{39}} = \sqrt{1153 - 897} = 16$
(по теореме косинусов)

4. по теореме синусов:
$\frac{KM}{\sin\angle KNM} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM}$

~~$\sin\angle KNM$~~
$\sin^2\angle KNM + \cos^2\angle KNM = 1$ – основное тригонометрическое тождество
$\sin\angle KNM = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$

$R = \frac{16}{\frac{10}{8}} = 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{5} = 12\frac{4}{5} = 12{,}8$

Ответ: $R = 12{,}8$.

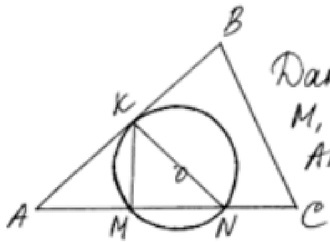
? баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 25. Пример 2. Работа 1

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

Ответ: 12,8.



Дано: $\triangle ABC$.
$M, N \in AC$.
$AM = 16$; $AN = 39$
$M, N \in w(O; r)$
K – точка касания
$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$
Найти: r – ?

Решение:

1. $AK^2 = AM \cdot AN$ (по теореме о касательной и секущей)
$AK^2 = 16 \cdot 39 = 624$.

2. Рассмотрим $\triangle AKN$.
$\angle KAN = \frac{1}{2} \cup KM$ (по теореме об угле между секущей и касательной)
$\angle KNM = \frac{1}{2} \cup KM$ (вписанный угол)
$\Rightarrow \triangle AKN$ – р/б.
$KN = AK$
$\cos\angle BAC = \cos\angle KNM$.

3. Рассмотрим $\triangle KMN$: $(MN = AN - AM = 39 - 16 = 23)$
$KM^2 = KN^2 + MN^2 - 2KM \cdot KN \cdot \cos\angle KNM$.
$KM = \sqrt{624 + 529 - 2 \cdot 23 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \sqrt{39}} = \sqrt{1153 - 897} = 16$
(по теореме косинусов)

4. по теореме синусов:
$\frac{KM}{\sin\angle KNM} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM}$

~~sin∠KNM~~
$\sin^2\angle KNM + \cos^2\angle KNM = 1$ – основное тригонометрическое тождество
$\sin\angle KNM = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$

$R = \frac{16}{\frac{10}{8}} = 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{5} = 12\frac{4}{5} = 12,8$

Ответ: $R = 12,8$.

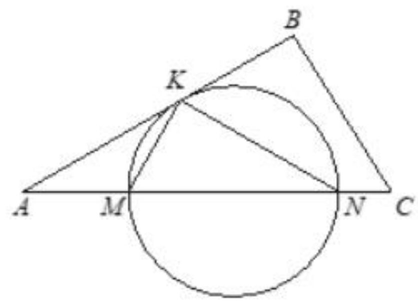
2 балла

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 25. Пример 3

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Решение.



Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN = 4 \cdot 15 = 60$.

По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos\angle BAC =$$

$$= 16 + 60 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{60} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 16$$

Значит, $KM = 4$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.

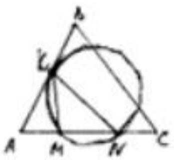
Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов $R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{4}{2\sqrt{1-\frac{15}{16}}} = 8$.

Ответ: 8.

Задание 25. Пример 3. Работа 1

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: 8.



Дано:
$AM = 4,\ AN = 15,$
$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Найти: R

Решение:

$AK^2 = \sqrt{AM \cdot AN} = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$

$\triangle AKM$: по т. косинусов

$KM = \sqrt{AK^2 + AM^2 - 2AK \cdot AM \cdot \cos\angle KAM} = \sqrt{60 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{16} = 4$

$\triangle AKN$: по т. косинусов

$KN = \sqrt{AK^2 + AN^2 - 2 \cdot AK \cdot AN \cdot \cos\angle KAN} = \sqrt{60 + 225 - 2 \cdot 15 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$R = \frac{KM \cdot MN \cdot KN}{4S}$

$S = \frac{1}{2} KN \cdot MN \cdot \sin\angle KNM$

$\triangle AKN$ – р/б $(AK = KN) \Rightarrow \angle KAN = \angle KNA$

$\sin\angle KAN = \sqrt{1 - \cos^2\angle KAN} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$

$S = \frac{1 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 11}{2 \cdot 4} = \frac{11\sqrt{15}}{4}$

$R = \frac{11 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15}}{11 \cdot \sqrt{15}} = 8$

Ответ: 8

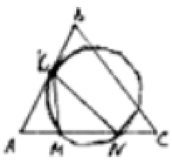
Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

? баллов

Задание 25. Пример 3. Работа 1

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: 8.



Дано:
$AM = 4$, $AN = 15$,
$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
Найти: R

Решение:

$AK^2 = \sqrt{AM \cdot AN} = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$

$\triangle AKM$: по т. косинусов

$KM = \sqrt{AK^2 + AM^2 - 2AK \cdot AM \cdot \cos\angle KAM} = \sqrt{60 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{16} = 4$

$\triangle AKN$: по т. косинусов

$KN = \sqrt{AK^2 + AN^2 - 2 \cdot AK \cdot AN \cdot \cos\angle KAN} = \sqrt{60 + 225 - 2 \cdot 15 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

$R = \frac{KM \cdot MN \cdot KN}{4S}$

$S = \frac{1}{2} KN \cdot MN \cdot \sin\angle KNM$

$\triangle AKN$ – р/б ($AK = KN$) $\Rightarrow \angle KAN = \angle KNA$

$\sin\angle KAN = \sqrt{1 - \cos^2\angle KAN} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$

$S = \frac{1 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 11}{2 \cdot 4} = \frac{11\sqrt{15}}{4}$

$R = \frac{11 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15}}{11 \cdot \sqrt{15}} = 8$

Ответ: 8

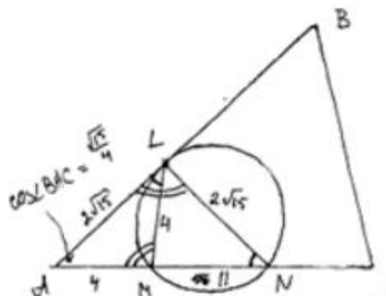
2 балла

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 25. Пример 3. Работа 2

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: 8.



L - точка касания окр-ти и AB; $\angle ANL = \angle ALN$ (вписанный угол равен углу между касательной и хордой)

$\triangle ALM \sim \triangle ALN$ (по 2 углам)

$\frac{AL}{AN} = \frac{AM}{AL} = \frac{LM}{LN} \Rightarrow AL^2 = AN \cdot AM = 4 \cdot 15 \Rightarrow AL = 2\sqrt{15}$

$\triangle ALM$ по теореме косинусов: $LM^2 = AL^2 + AM^2 - 2 \cdot AL \cdot AM \cdot \cos(\angle BAC)$

$LM^2 = 15 \cdot 4 + 16 - \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{15} \cdot 4 \cdot \sqrt{15}}{4} = 15 \cdot 4 + 16 - 4 \cdot 15 = 16$

$LM = 4$; из подобия $\Rightarrow AM \cdot LN = AL \cdot LM \Rightarrow LN = \frac{AL \cdot LM}{AM}$;

$LN = \frac{2\sqrt{15} \cdot 4}{4} = 2\sqrt{15}$; из основного тригонометрического тождества:

$\sin^2 BAC + \cos^2 BAC = 1 \Rightarrow \sin^2 BAC = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin BAC = \frac{1}{4}$

~~по теореме синусов для $\triangle ALN$~~: $\cancel{\frac{2\sqrt{15}}{\sin ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin \angle NA}}$

$\cancel{\frac{2\sqrt{15}}{\sin ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin \angle LAN}}$ $AL = LN \Rightarrow \triangle ALN$ р/б (основание AN)

$\Downarrow$

По теореме синусов для $\triangle LMN$: ($\triangle LMN$ - вписан в окружность) $\angle LAN = \angle LNA$

$\Downarrow$

$\frac{LM}{\sin(\angle LNA)} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{4}} = 2R$; $4 : \frac{1}{4} = 2R$ $\quad \sin(\angle LAN) = \sin(\angle LNA) = \frac{1}{4}$

$16 = 2R \Rightarrow \boxed{R = 8}$

Ответ: 8

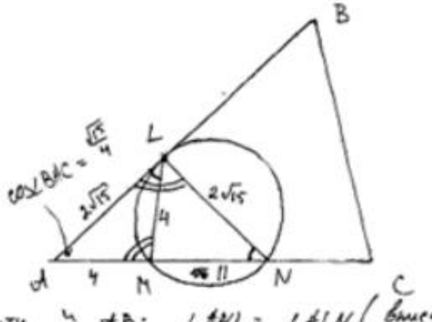
? баллов

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 25. Пример 3. Работа 2

Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: 8.



L - точка касания окр-ти и AB; $\angle ANL = \angle ALN$ (вписанный угол равен углу между касательной и хордой)

$\triangle ALM \sim \triangle ALN$ (по 2 углам)

$\frac{AL}{AN} = \frac{AM}{AL} = \frac{LM}{LN} \Rightarrow AL^2 = AN \cdot AM = 4 \cdot 15 \Rightarrow AL = 2\sqrt{15}$

$\triangle ALM$ по теореме косинусов: $LM^2 = AL^2 + AM^2 - 2 \cdot AL \cdot AM \cdot \cos(\angle BAC)$

$LM^2 = 15 \cdot 4 + 16 - \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{15} \cdot 4 \cdot \sqrt{15}}{4} = 15 \cdot 4 + 16 - 4 \cdot 15 = 16$

$LM = 4$; из подобия $\Rightarrow AM \cdot LN = AL \cdot LM \Rightarrow LN = \frac{AL \cdot LM}{AM}$;

$LN = \frac{2\sqrt{15} \cdot 4}{4} = 2\sqrt{15}$; из основного тригонометрического тождества:

$\sin^2 BAC + \cos^2 BAC = 1 \Rightarrow \sin^2 BAC = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin BAC = \frac{1}{4}$

~~по теореме синусов для $\triangle ALN$~~: $\cancel{\frac{2\sqrt{15}}{\sin ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin\angle NA}}$

$\cancel{\frac{2\sqrt{15}}{\sin ANL} = \frac{2\sqrt{15}}{\sin\angle AN}}$ $AL = LN \Rightarrow \triangle ALN$ р/б (основание AN) $\Downarrow$

По теореме синусов для $\triangle LMN$: ($\triangle LMN$ - вписан в окружность) $\angle LAN = \angle LNA$ $\Downarrow$ $\sin(\angle LAN) = \sin(\angle LNA) = \frac{1}{4}$

$\frac{LM}{\sin(\angle LNA)} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{4}} = 2R$; $4 : \frac{1}{4} = 2R$

$16 = 2R \Rightarrow \boxed{R = 8}$

Ответ: 8

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

2 балла

Хорошего дня!