Е.В. Бирюлина

Решение стереометрической задачи ЕГЭ координатно-векторным методом

Брянск
2022

УДК 51
ББК 22.151.0
Б-649

ISBN 978-5-6047719-0-7

Бирюлина Е.В. Решение стереометрической задачи ЕГЭ координатно-векторным методом. – Брянск: ИП Усова И.Н., 2022. – 50 с.

Рецензенты:
Кафедра математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Брянский государственный инженерно-технологический университет», заведующий кафедрой Баранова Ирина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент.
Кипень Ирина Степановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономики, таможенного дела, информационных технологий и дисциплин естественнонаучного цикла Брянского филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова».

Данное учебно-методическое пособие предназначено для подготовки школьников к решению задач ЕГЭ координатно-векторным методом. В пособии приводятся необходимые теоретические сведения, типовые задачи даются с подробными решениями, имеется достаточное количество задач для самостоятельного решения.
Для учителей и учеников средних школ.

УДК 51
ББК 22.151.0
Б-649

ISBN 978-5-6047719-0-7

Содержание

Введение

Алгебра - не что иное, как записанная в символах геометрия, а геометрия – это просто алгебра, воплощённая в фигурах

Софи Жермен

Анализ результатов ЕГЭ по математике из года в год показывает, что задачи по стереометрии вызывают достаточно серьёзные затруднения у выпускников. Связано это с множеством различных факторов, в том числе с недостаточной развитостью пространственного мышления, неумением строить чертёж, ошибками в построении логической цепочки рассуждений, сложностями с применением тригонометрических соотношений при решении геометрических задач.

Координатно-векторный метод позволяет избежать необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций. От учащегося требуются: знание ряда формул и навыки в выполнении не очень сложных построений, основная нагрузка при решении задачи приходится на вычислительную часть. Как показывает практика, этот метод доступен даже учащимся с недостаточно развитым пространственным мышлением, что позволяет повысить уровень их подготовки к ЕГЭ.

В данной работе предложено применение метода координат к основным типам задач, встречающихся в ЕГЭ, в которых нужно найти углы или расстояния между стереометрическими объектами.

1. Элементы векторной алгебры

Векторы. Линейные операции над векторами

Вектором будем называть направленный отрезок.

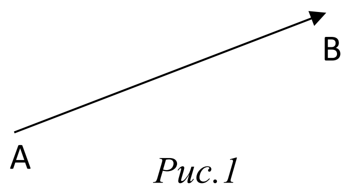


Рис.1

т. A - начало вектора;

т. B - конец вектора;

$\overrightarrow{AB}$ - вектор AB;

$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ - длина (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}$, которая совпадает в выбранном масштабе с длиной отрезка AB. Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$.

Два ненулевых вектора, лежащие на параллельных или совпадающих прямых, называются ***коллинеарными***. Если $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$, то пишут $\vec{a}||\vec{b}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными*** ($\vec{a}=\vec{b}$), если они удовлетворяют условиям: 1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$; 2) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ (векторы коллинеарны и направлены в одну сторону).

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***противоположными*** ($\vec{a}=-\vec{b}$), если они удовлетворяют условиям: 1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$; 2) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ (векторы коллинеарны и направлены в разные стороны).

Векторы в пространстве называются ***компланарными***, если они параллельны одной и той же плоскости.

Линейными операциями над векторами являются операции сложения, вычитания векторов и умножения вектора на скаляр.

1) Сумма векторов. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют третий вектор $\vec{c}$, который находят по правилу треугольника или параллелограмма. Обозначают: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Правило треугольника: сохраняя первоначальные направления, начало вектора $\vec{b}$ совмещают с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор $\vec{c}$, выходящий из начала $\vec{a}$ в конец $\vec{b}$ и есть сумма $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ (см. рис. 3).

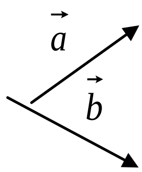


Рис. 2

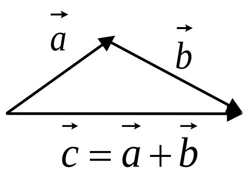


Рис. 3

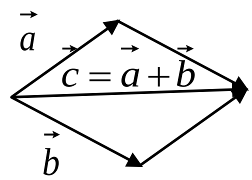


Рис. 4

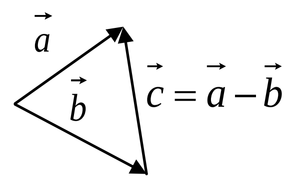


Рис. 5

Правило параллелограмма: сохраняя первоначальные направления, совмещают начало вектора $\vec{a}$ с началом вектора $\vec{b}$. Тогда вектор с началом в точке совмещения и концом в противоположной вершине параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и будет их суммой $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ (см. рис. 4).

<u>Свойства суммы векторов</u>

1) коммутативность: $\forall \vec{a},\vec{b}\ \ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$[1];
2) ассоциативность: $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}\ \ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
3) $\forall \vec{a}\ \ \vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$;
4) $\forall \vec{a}=\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

2) Разность векторов. Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, сумма которого с вычитаемым вектором $\vec{b}$ даёт вектор $\vec{a}$. Для того, чтобы построить разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, необходимо, сохраняя первоначальные направления, совместить их начала. При этом

[1] ∀-квантор всеобщности (читается «любой», «всякий», «для любого»).

вектор, соединяющий их концы и направленный от вычитаемого к уменьшаемому и есть их разность (см. рис. 5).

3) Произведение вектора на число. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное число $k \neq 0$ называется вектор, длина которого равна $|k||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $k > 0$, и противоположно ему, если $k < 0$. Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается $k\vec{a}$.

<u>Свойства операции умножения вектора на число</u>

1) ассоциативность: $\forall\vec{a}, \forall n, m \in \Re \quad n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a}$;
2) дистрибутивность: $\forall\vec{a}, \vec{b}, \ \forall n, m \in \Re \quad n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$ и $(n + m)\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a}$;
3) $\forall\vec{a} \ 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
4) $\forall\vec{a}, \forall\lambda \in \Re \ (-\lambda)\vec{a} = -(\lambda\vec{a})$.

<u>Теоремы о коллинеарных и компланарных векторах</u>

Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов

Вектор $\vec{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда существует число k такое, что $\vec{a} = k\vec{b}$.

Доказательство

<u>Необходимость</u>. Рассмотрим два случая: коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены в одну сторону или в противоположные стороны. В первом случае $\vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$ и $k = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$. Во втором случае $\vec{a} = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$ и $k = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

<u>Достаточность</u>. Если $\vec{a} = k\vec{b}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны по определению умножения вектора на число и определению коллинеарности.

Разложение вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам

На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты в разложении определяются единственным образом.

Доказательство

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы. Докажем, что любой вектор $\vec{c}$, лежащий в той же плоскости, можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возможны следующие случаи.

1) Вектор $\vec{c}$ коллинеарен одному из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, например, вектору $\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{c}$ можно представить в виде: $\vec{c} = y\vec{b}$, где y-некоторое число. Получаем, что $\vec{c} = 0\vec{a} + y\vec{b}$.

2) Вектор $\vec{c}$ не коллинеарен ни $\vec{a}$, ни $\vec{b}$.

Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (см. рис. 6). Через точку C проведём прямую, параллельную OB и обозначим через A_1 точку пересечения этой прямой с прямой OA. Тогда $\vec{c} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C}$ (по правилу треугольника). Векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ коллинеарны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поэтому существуют числа x и y, такие, что $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1C} = y\vec{b}$. Получаем, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

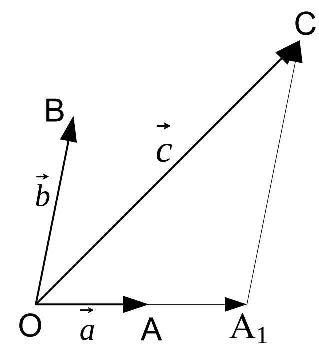


Рис. 6

Докажем единственность коэффициентов разложения. Пусть наряду с разложением $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ существует другое разложение $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$. Вычтем второе равенство из первого: $\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}$. Это равенство может выполняться только в том случае, когда коэффициенты $x-x_1$ и $y-y_1$ равны 0 (в противном случае получаем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны). Тогда $x=x_1$ и $y=y_1$. Значит, коэффициенты разложения вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяются единственным образом.

Признак компланарности трёх векторов

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Доказательство

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы (если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна). Отложим от произвольной точки О векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (см. рис. 7). Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат в плоскости OAB. В этой же плоскости лежат векторы $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, а, следовательно, и $\overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{c}$. Получаем, что векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ лежат в одной плоскости, т.е. они компланарны.

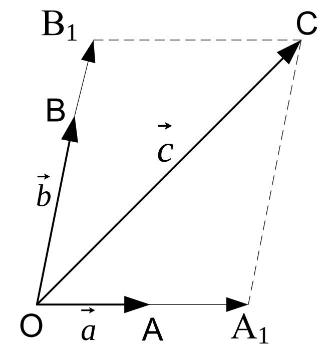


Рис. 7

Справедлива и **обратная теорема**: Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, которые определяются единственным образом (доказывается на основе теоремы о разложении вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам).

Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

Любой вектор можно разложить по трём данным некомпланарным векторам, причём коэффициенты в разложении определяются единственным образом.

Доказательство

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – некомпланарные векторы. Докажем, что любой вектор $\vec{p}$ можно представить в виде: $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.Отложим от произвольной точки О векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ (см. рис. 8). Через точку P

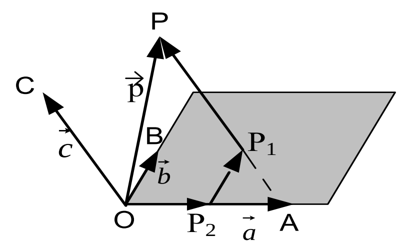


Рис. 8

проведём прямую, параллельную OC, и обозначим через P_1 точку пересечения этой прямой с плоскостью AOB (если $P \in OC$, то в качестве точки P_1 возьмём точку O). Затем через точку P_1 проведём прямую, параллельную OB, и обозначим через P_2 точку пересечения этой прямой с прямой AO (если $P_1 \in OB$, то в качестве точки P_2 возьмём точку O). Тогда $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$. Векторы $\overrightarrow{OP_2}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{OC}$, коллинеарны, поэтому существуют числа x, y, z, такие, что $\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$. Получаем, что $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Докажем единственность коэффициентов разложения. Пусть наряду с разложением $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ существует другое разложение $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$. Вычтем второе равенство из первого: $\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$. Это равенство может выполняться только в том случае, когда коэффициенты $x\text{-}x_1$; $y\text{-}y_1$; $z\text{-}z_1$ равны 0 (в противном случае получаем, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны). Тогда $x=x_1$; $y=y_1$ и $z=z_1$. Значит, коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Угол между векторами. Проекция вектора на ось

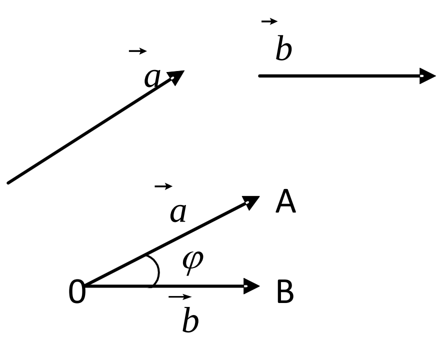


Рис. 9

Пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим их от точки O, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Величина внутреннего угла AOB называется ***углом между векторами*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ и обозначается $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ или греческими буквами α, β, γ и т.д. По определению угол между векторами лежит в промежутке от $0°$ до $180°$. Если $\varphi = 90°$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют ***перпендикулярными*** или ***ортогональными*** и пишут $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Осью называется прямая, на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и единица длины. Пусть положительное направление оси l совпадает с направлением единичного вектора $\vec{l_0}$, расположенного на ней. Такой вектор называется ***ортом*** оси l. ***Углом между вектором*** $\vec{a}$ ***и осью l*** называется угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{l_0}$ (см. рис. 10).

Рис. 10

Ортогональной проекцией точки А на ось l называется точка A_1, в которой пересекается ось l с плоскостью, перпендикулярной к l, проходящей через точку А (см. рис. 11).

Компонентой (составляющей) вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ***на ось l*** называется вектор $\vec{a'} = \overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1, B_1 – соответствующие ортогональные проекции точек А, В на ось l.

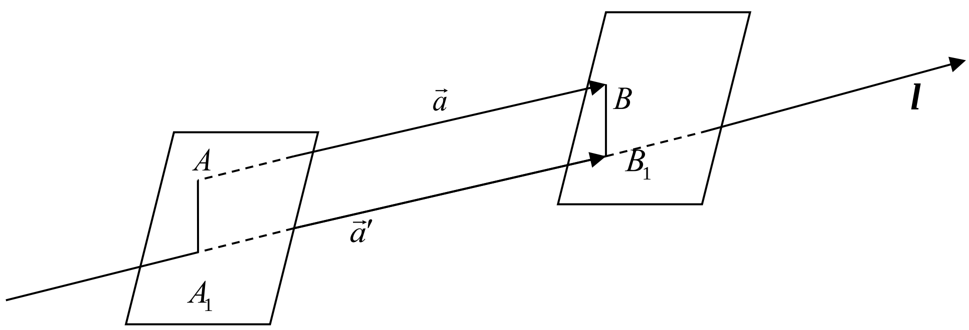


Рис. 11

Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется длина его компоненты $\vec{a'}$ на ось l, взятая со знаком «+», если направление компоненты совпадает с направлением оси l, и со знаком «-», если направление компоненты противоположно направлению оси l. Обозначается символом $np_l\vec{a}$.

Теорема

Ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью, т.е. $np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi\ \varphi$, где φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью l.

Доказательство

Отложим вектор $\vec{a}$ от точки O оси l: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Возможны три случая.

1) φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью l является острым (см. рис. 12). Обозначим A_1 ортогональную проекцию точки A на ось l. Направление $\vec{a'} = \overrightarrow{OA_1}$ совпадает с направлением оси. Тогда из ΔOAA_1 получаем, что $\text{пр}_l\vec{a} = |\overrightarrow{OA_1}| = OA \cdot \cos\varphi = |\vec{a}|\cos\varphi$.

2) φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью l является тупым (см. рис. 13). Обозначим A_1 ортогональную проекцию точки A на ось l. Направление $\vec{a'} = \overrightarrow{OA_1}$ противоположно направлению оси. Получаем, что $\text{пр}_l\vec{a} = -|\overrightarrow{OA_1}| = -OA \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}|\cos\varphi$.

3) φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью l является прямым (см. рис. 14). В этом случае $\text{пр}_l\vec{a} = 0$; $\cos\varphi = 0$. Таким образом, справедливо равенство: $\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$.

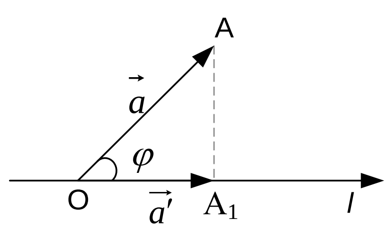


Рис. 12

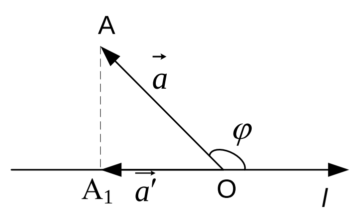


Рис. 13

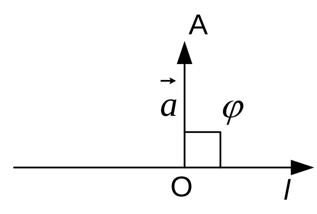


Рис. 14

<u>Свойства проекции вектора на ось</u>

1) $np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}$;

2) $np_l(\lambda\vec{a}) = \lambda np_l\vec{a}$.

Прямоугольная декартова система координат. Координаты вектора

Для описания геометрических объектов в пространстве вводят прямоугольную декартову систему координат.

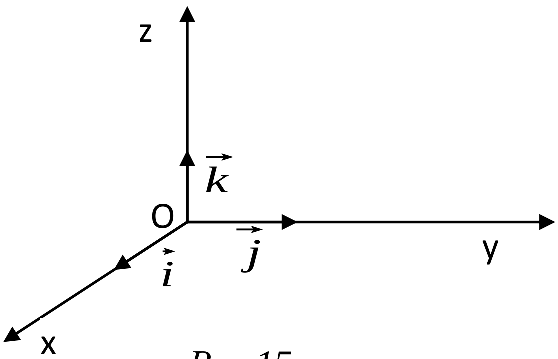


Рис.15

т. O – начало координат;

Ox – ось абсцисс;

Oy – ось ординат;

Oz – ось аппликат.

Орты осей Ox, Oy, Oz обозначают соответственно $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$, $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$.

Т.к. векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ некомпланарны, то любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по этим векторам, т.е. существуют такие числа x, y, z, что вектор $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. $\{x;y;z\}$- прямоугольные декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Выясним геометрический смысл чисел $\{x;y;z\}$. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось x: $\text{пр}_{Ox}\vec{a}=\text{пр}_{Ox}\left(\text{x}\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right)=\text{пр}_{Ox}(\text{x}\vec{\imath})+\text{пр}_{Ox}(y\vec{\jmath})+\text{пр}_{Ox}\left(z\vec{k}\right)=$

$=x\cdot\text{пр}_{Ox}(\vec{\imath})+y\cdot\text{пр}_{Ox}(\vec{\jmath})+z\cdot\text{пр}_{Ox}\left(\vec{k}\right)=x\cdot 1+y\cdot 0+z\cdot 0=x.$

Аналогично $\text{пр}_{Oy}\vec{a}=\text{y}$; $\text{пр}_{Oz}\vec{a}=z$. Таким образом, $\{x;y;z\}$ - проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно.

Произвольной точке A пространства соответствует вектор $\overrightarrow{OA}$ - радиус-вектор этой точки. Координаты радиус-вектора совпадают с координатами точки в выбранной системе координат. Пусть $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$, т.к. $\overrightarrow{\text{AB}}=\overrightarrow{\text{OB}}-\overrightarrow{\text{OA}}$.

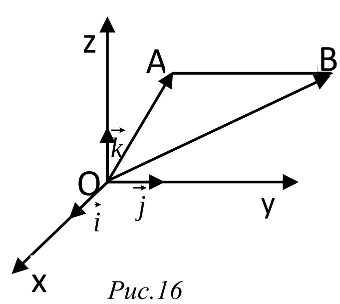


Рис.16

Если точка $C(x;y;z)$ делит отрезок AB в отношении t (т.е. AC:CB=t), то координаты этой точки отделяются формулами $x=\frac{x_1+tx_2}{1+t}$, $y=\frac{y_1+ty_2}{1+t}$, $z=\frac{z_1+tz_2}{1+t}$, где $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ (это следует из того, что $\overrightarrow{AC}=t\cdot\overrightarrow{CB}$). Если т. $C(x;y;z)$ - середина отрезка AB, то $x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$; $z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

Пусть $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, то $\vec{a}\pm\vec{b}=\{x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2\}$. Для любого действительного числа k верно: $k\vec{a}=\{kx_1;ky_1;kz_1\}$.

Векторы $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ (если $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то существует действительное число k, такое, что $\vec{a}=k\vec{b}$, в координатном виде равенство имеет вид: $\{x_1,y_1,z_1\}=k\{x_2,y_2,z_2\}=\{kx_2,ky_2,kz_2\}$, откуда получаем, что отношения соответствующих координат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны k).

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\vec{b}$.

Если $\vec{a}=\vec{b}$, то скалярное произведение принимает вид $\vec{a}\vec{a}$ и называется скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$. Ясно, что $\vec{a}^2=\vec{a}\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

Свойства скалярного произведения векторов

1) коммутативность: $\forall \vec{a}, \vec{b}\ \vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;

2) дистрибутивность: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$;

3) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \forall \lambda \in \Re\ (\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$.

Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов

Два ненулевых вектора перпендикулярны (ортогональны) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Доказательство

Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$, тогда $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos 90° = 0$ и $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|0 = 0$.

Обратно: если $\vec{a}\vec{b} = 0$, то из равенства $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ следует, что $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$, т.к. $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$. Из $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ получаем $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами

Пусть дана некоторая прямоугольная декартова система координат с единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и пусть заданы векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$. Поскольку $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то из свойств скалярного произведения следует, что

$$\vec{a}\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i}^2 + y_1y_2\vec{j}^2 +$$
$$+ z_1z_2\vec{k}^2 + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1z_2\vec{j}\vec{k} +$$
$$+ z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j}.$$

Так как $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ и $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{i} = \vec{i}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0$, то получим, что $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы на плоскости, т.е. $\vec{a}=\{x_1;y_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2\}$, то $\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

Если $\vec{a}=\vec{b}$, то с одной стороны, $\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2$, а с другой стороны, $\vec{a}\vec{b}=x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}$. Тогда $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}$. Итак, модуль (длина) вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Если $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$. Длина вектора $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\mathrm{AB}=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. Получаем формулу для нахождения расстояния между двумя точками, заданными своими координатами.

Во многих заданиях требуется найти угол между векторами. Из определения скалярного произведения получаем:

$$cos\left(\hat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Косинусы углов наклона вектора $\vec{a}$ к осям координат называются направляющими косинусами данного вектора. Пусть α,β,γ -углы наклона вектора $\vec{a}=\{x;y;z\}$ к осям Ox,Oy,Oz соответственно. Тогда $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

<u>Свойства направляющих косинусов</u>

1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$;

2) $\frac{\cos\alpha}{x}=\frac{\cos\beta}{y}=\frac{\cos\gamma}{z}$.

2. Плоскость в пространстве

Пусть задана прямоугольная система координат *Oxyz* и дана некоторая поверхность F. Уравнение с тремя переменными x, y, z, называется уравнением поверхности F, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

I. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярной заданному вектору. Получим уравнение плоскости α, проходящей через точку $\mathrm{M}_0(\mathrm{x}_0,\ \mathrm{y}_0,\ z_0)$ и перпендикулярной ненулевому вектору $\vec{n}\{A, B, C\}$. Вектор $\vec{n}$ называется вектором нормали для плоскости α. Пусть точка $\mathrm{M}(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ z\ )$, отличная от M_0, принадлежит плоскости α. Тогда векторы $\vec{n}\{A, B, C\}$ и $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}\{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0, \mathrm{y}-\mathrm{y}_0, z-z_0\}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+\mathrm{B}(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)+\mathrm{C}(z-z_0)=0$. Данному уравнению удовлетворяют координаты всех точек плоскости α, в том числе и M_0 и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих плоскости (для них векторы $\vec{n}\{A, B, C\}$ и $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$ не являются взаимно перпендикулярными, поэтому их скалярное произведение не будет равно нулю). Поэтому данное уравнение является уравнением плоскости, проходящей через точку $\mathrm{M}_0(\mathrm{x}_0,\ \mathrm{y}_0,\ z_0)$ и перпендикулярной ненулевому вектору $\vec{n}\{A, B, C\}$.

Уравнение $\mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+\mathrm{B}(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)+\mathrm{C}(z-z_0)=0$ можно записать в виде: $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}z+D=0$, где $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2\neq 0$. Это уравнение называется общим уравнением плоскости. Получаем, что уравнение плоскости в прямоугольной декартовой системе координат является уравнением первой степени. Для плоскости, заданной уравнением $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}z+D=0$, вектор нормали имеет координаты $\vec{n}\{A, B, C\}$.

Пример 1

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathrm{A}(2;\ -1; 3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}\{5;\ -2; 1\}$.

Решение

Уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathrm{M}_0(\mathrm{x}_0,\ \mathrm{y}_0,\ z_0)$ и перпендикулярной ненулевому вектору $\vec{n}\{A, B, C\}$, имеет вид: $\mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+\mathrm{B}(\mathrm{y}-\mathrm{y}_0)+\mathrm{C}(z-z_0)=0.$ Получаем:

$5(\mathrm{x}-2)-2(\mathrm{y}+1)+1(z-3)=0;$

$5\mathrm{x}-10-2\mathrm{y}-2+z-3=0;$

$5\mathrm{x}-2\mathrm{y}+z-15=0.$

Ответ: $5\mathrm{x}-2\mathrm{y}+z-15=0.$

II. Уравнение плоскости, заданной тремя точками. Пусть известны координаты трёх точек, принадлежащих плоскости: $\mathrm{M}(\mathrm{x}_1;\ y_1;\ z_1), N(\mathrm{x}_2;\ y_2;\ z_2), K(\mathrm{x}_3;\ y_3;\ z_3)$. Чтобы составить уравнение плоскости MNK, необходимо подставить координаты точек в общее уравнение плоскости $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}z+D=0$ и решить полученную систему уравнений.

Пример 2

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $\mathrm{M}(2;\ -1;\ 3), N(1;\ 0;\ -2), K(5;\ 2;\ -1)$.

Решение

Общее уравнение плоскости имеет вид: $\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}z+D=0$. Так как точки принадлежат плоскости, то их координаты удовлетворяют её уравнению. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\mathrm{A}-\mathrm{B}+3\mathrm{C}+D=0, \\ \mathrm{A} \quad - \quad 2\mathrm{C} \quad + \quad D=0, \\ 5\mathrm{A}+2\mathrm{B}-\mathrm{C}+D=0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения A и подставим полученное выражение в первое и третье уравнения:

$$\begin{cases} 2(2\mathrm{C}-D)-\mathrm{B}+3\mathrm{C}+D=0, \\ \mathrm{A}=2\mathrm{C}-D, \\ 5(2\mathrm{C}-D)+2\mathrm{B}-\mathrm{C}+D=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(2\mathrm{C}-D)-\mathrm{B}+3\mathrm{C}+D=0, \\ \mathrm{A}=2\mathrm{C}-D, \\ 5(2\mathrm{C}-D)+2\mathrm{B}-\mathrm{C}+D=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4C - 2D - B + 3C + D = 0, \\ A = 2C - D, \\ 10C - 5D + 2B - C + D = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -B + 7C - D = 0, \\ A = 2C - D, \\ 2B + 9C - 4D = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения В и подставим в третье:

$$\begin{cases} B = 7C - D, \\ A = 2C - D, \\ 2(7C - D) + 9C - 4D = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 7C - D, \\ A = 2C - D, \\ 14C - 2D + 9C - 4D = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 7C - D, \\ A = 2C - D, \\ 23C - 6D = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения получаем, что $C = \frac{6}{23}D$.

Тогда $A = 2 \cdot \frac{6}{23}D - D = -\frac{11}{23}D$; $B = 7 \cdot \frac{6}{23}D - D = \frac{19}{23}D$. Подставляем в общее уравнение плоскости полученные выражения:

$-\frac{11}{23}Dx + \frac{19}{23}Dy + \frac{6}{23}Dz + D = 0$. Делим обе части уравнения на D и умножаем на -23, получаем уравнение: $11x - 19y - 6z - 23 = 0$. Это и есть искомое уравнение плоскости MNK. В этом не сложно убедиться, подставив координаты заданных точек.

Ответ: $11x - 19y - 6z - 23 = 0$.

Видно, что способ написания уравнения плоскости по трём точкам, рассмотренный в примере 2, достаточно громоздок. Можно воспользоваться методом нахождения уравнения плоскости по трём точкам из высшей математики путём вычисления определителя матрицы третьего порядка. Если заданы точки, принадлежащие плоскости: $M(x_1;\ y_1;\ z_1), N(x_2;\ y_2;\ z_2), K(x_3;\ y_3;\ z_3)$, то её уравнение имеет вид: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$. При этом определитель матрицы третьего порядка проще всего вычислить по правилу Саррюса. Рассмотрим определитель: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. По правилу Саррюса:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \boxed{-}\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}\ \boxed{+} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Пример 3

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $\mathrm{M}(2;\ -1;\ 3), N(1;\ 0;\ -2), K(5;\ 2;\ -1)$.

Решение

Если заданы точки, принадлежащие плоскости: $\mathrm{M}(\mathrm{x}_1;\ y_1;\ z_1), N(\mathrm{x}_2;\ y_2;\ z_2), K(\mathrm{x}_3;\ y_3;\ z_3)$, то её уравнение имеет вид: $\begin{vmatrix} \mathrm{x} - \mathrm{x}_1 & \mathrm{y} - \mathrm{y}_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$

Для заданных точек получаем:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x} - 2 & \mathrm{y} + 1 & z - 3 \\ 1 - 2 & 0 + 1 & -2 - 3 \\ 5 - 2 & 2 + 1 & -1 - 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x} - 2 & \mathrm{y} + 1 & z - 3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} \mathrm{x} - 2 & \mathrm{y} + 1 & z - 3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0; \\ \begin{matrix} \mathrm{x} - 2 & \mathrm{y} + 1 & z - 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{matrix} \end{array}$$

$$(\mathrm{x} - 2) \cdot 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 3 \cdot (z - 3) + 3(y + 1)(-5) -$$

$$-(z - 3) \cdot 1 \cdot 3 - (-5) \cdot 3 \cdot (x - 2) - (-4) \cdot (y + 1)(-1) = 0;$$

$$-4x + 8 - 3z + 9 - 15y - 15 - 3z + 9 + 15x - 30 - 4y - 4 = 0;$$

$$11x - 19y - 6z - 23 = 0.$$

Ответ: $11\mathrm{x} - 19\mathrm{y} - 6z - 23 = 0.$

III. Нахождение вектора нормали для плоскости, заданной тремя точками. Во многих задачах не обязательно знать полное уравнение плоскости. Достаточно найти координаты её нормального вектора.

Пусть известны координаты трёх точек, принадлежащих плоскости: $\text{M}(\text{x}_1;\ y_1;\ z_1), N(\text{x}_2;\ y_2;\ z_2), K(\text{x}_3;\ y_3;\ z_3)$. Из условий $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}, \vec{n} \perp \overrightarrow{MK}$, где $\vec{n}$-вектор нормали плоскости MNК, получаем систему уравнений, решая которую, находим координаты вектора $\vec{n}$.

Пример 4

Найдите координаты вектора нормали к плоскости MNК, если $\text{M}(2;\ -1;\ 3), N(1;\ 0;\ -2), K(5;\ 2;\ -1)$.

Решение

Так как вектор $\vec{n}$ перпендикулярен плоскости, то он перпендикулярен любому вектору, лежащему в этой плоскости, в том числе и векторам $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MK}$.

$\overrightarrow{MN}\{1-2; 0-(-1);\ -2-3\}$; $\overrightarrow{MK}\{5-2; 2-(-1);\ -1-3\}$;

$\overrightarrow{MN}\{-1; 1;\ -5\}$; $\overrightarrow{MK}\{3; 3;\ -4\}$.

Пусть $\vec{n}\{\text{A}; \text{B}; \text{C}\}$. Т.к. $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}, \vec{n} \perp \overrightarrow{MK}$, то $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$; $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$. Получаем систему уравнений: $\begin{cases} -\text{A} + \text{B} - 5\text{C} = 0, \\ 3\text{A} + 3\text{B} - 4\text{C} = 0. \end{cases}$ Так как вектор нормали совершенно произвольный, придадим одной из переменных произвольное значение, например, положим А=11. Тогда система принимает вид: $\begin{cases} -11 + \text{B} - 5\text{C} = 0, \\ 3 \cdot 11 + 3\text{B} - 4\text{C} = 0. \end{cases}$ Решая полученную систему, получаем, что В=-19; С=-6. Тогда $\vec{n}\{11; -19; -6\}$.

Ответ: $\vec{n}\{11; -19; -6\}$.

3. Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач

Координатно-векторный метод решения геометрических задач заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) прямоугольной декартовой системы координат, а затем исчислении необходимых величин при помощи методов аналитической геометрии.

Алгоритм применения метода координат

1. Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
2. Находим координаты необходимых точек.
3. Решаем задачу, используя метод координат.
4. Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

4. Координаты вершин многогранников

Рассмотрим возможный вариант расположения системы координат относительно основных многогранников и найдём координаты их вершин.

Расположение осей координат в различных задачах может отличаться от предложенного в данной работе.

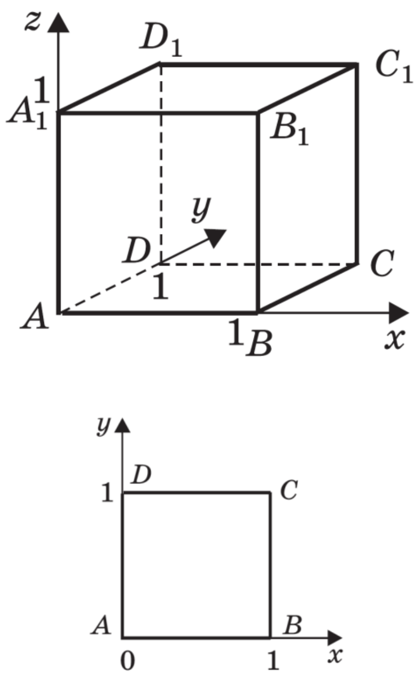
<table>
<tr><th colspan="2">Единичный куб</th></tr>
<tr><td>


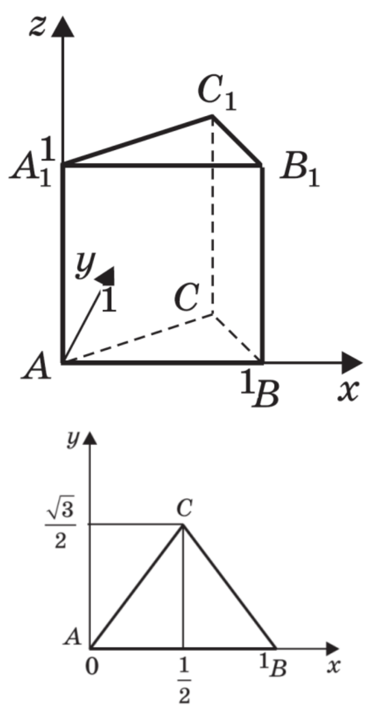
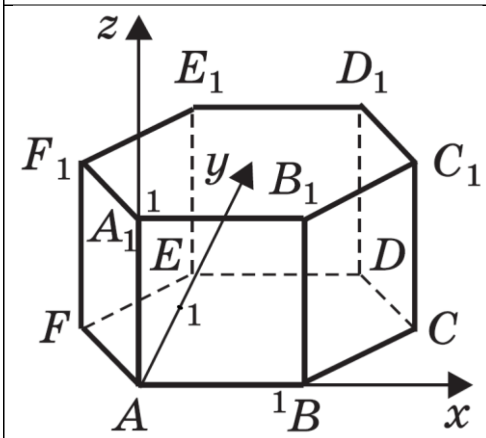
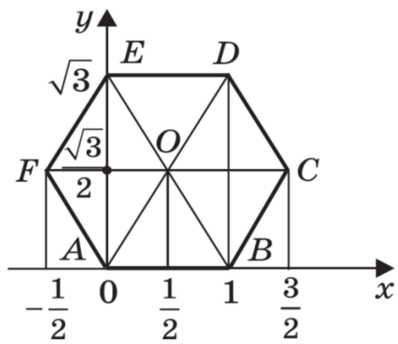
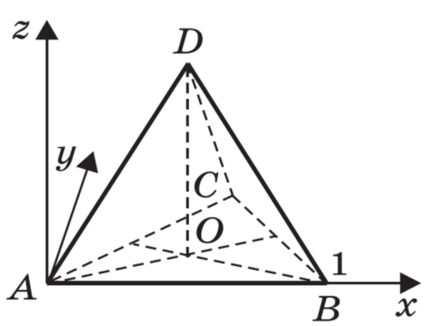
Рис. 17
</td><td>
т. A - начало координат;
ось x - прямая AB;
ось y - прямая AD;
ось z - прямая AA_1;
единичный отрезок – длина ребра куба.
Тогда вершины куба имеют координаты:
$A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$;
$C(1;1;0)$; $D(0;1;0)$;
$A_1(0;0;1)$; $B_1(1;0;1)$;
$C_1(1;1;1)$; $D_1(0;1;1)$.
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Правильная треугольная призма, все рёбра которой равны 1</th></tr>
<tr><td>


Рис. 18
</td><td>
т. A - начало координат;
ось x - прямая AB;
ось y – прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AB;
ось z - прямая AA_1;
единичный отрезок – длина ребра призмы.
Тогда вершины призмы имеют координаты:
$A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$;
$C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$; $A_1(0;0;1)$;
$B_1(1;0;1)$; $C_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.
</td></tr>
</table>

Правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1	
  *Рис. 19*	т. А - начало координат; ось x - прямая АВ; ось y – прямая, проходящая через точку А в плоскости АВС перпендикулярно прямой АВ; ось z - прямая AA_1; единичный отрезок – длина ребра призмы. Тогда вершины призмы имеют координаты: $A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$; $D(1;\sqrt{3};0)$; $E(0;\sqrt{3};0)$; $F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$; $A_1(0;0;1)$; $B_1(1;0;1)$; $C_1\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$; $D_1(1;\sqrt{3};1)$; $E_1(0;\sqrt{3};1)$; $F_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.
Правильная треугольная пирамида (тетраэдр), все рёбра которой равны 1	
	т. А - начало координат; ось x - прямая АВ; ось y – прямая, проходящая через точку А в плоскости АВС перпендикулярно прямой АВ; ось z – прямая, проходящая через точку А перпендикулярно плоскости АВС; единичный отрезок – длина ребра пирамиды. Тогда вершины пирамиды имеют

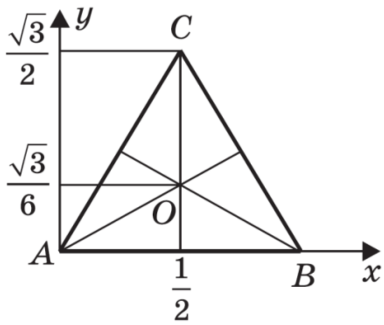
<table>
<tr><td>


Рис. 20
</td><td>
координаты:

$$A(0;0;0);\ \ B(1;0;0);$$

$$C\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right); D\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

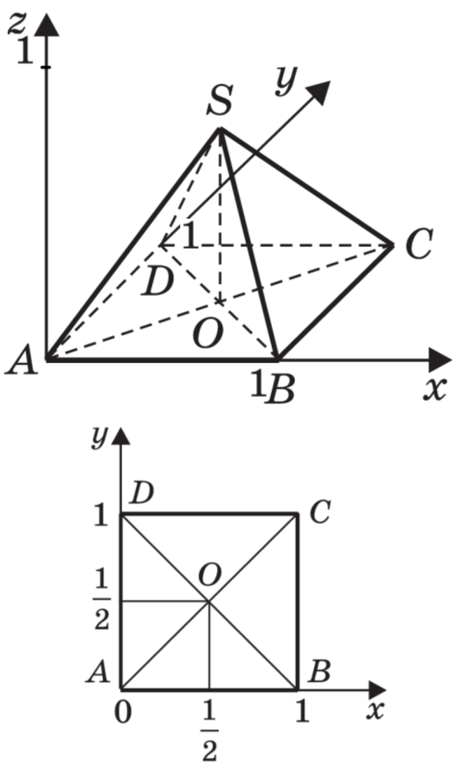
Правильная четырёхугольная пирамида, все рёбра которой равны 1
</td></tr>
<tr><td>


Рис. 21
</td><td>
т. А - начало координат;

ось x - прямая AB;

ось y – прямая AD;

ось z – прямая, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости ABC;

единичный отрезок – длина ребра пирамиды.

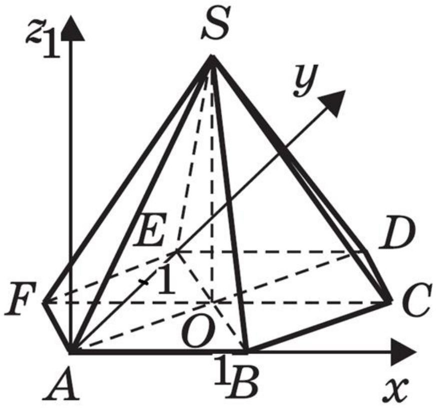
Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(0;0;0);\ \ B(1;0;0);$$

$$C(1;1;0); D(0;1;0);$$

$$S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Правильная шестиугольная пирамида, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра 2
</td></tr>
</table>



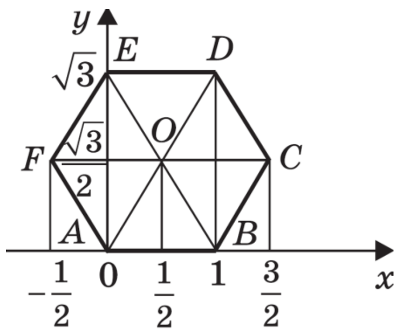


Рис. 22

т. A - начало координат;

ось x - прямая AB;

ось y – прямая, проходящая через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AB;

ось z – прямая, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости ABC;

единичный отрезок – длина стороны основания пирамиды.

Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(0;0;0);\ B(1;0;0);$$

$$C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right); D\left(1;\sqrt{3};0\right);$$

$$E\left(0;\sqrt{3};0\right); F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right);$$

$$S\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3}\right).$$

Мы не расписываем подробно нахождение координат вершин многогранников, так как оно не представляет больших трудностей.

5. Основные типы задач

1) Нахождение угла между прямыми

Направляющий вектор прямой – это вектор, лежащий на этой прямой или параллельный ей. Если для каждой прямой известны координаты двух точек, ей принадлежащих, можно ввести систему координат и рассмотреть векторы с началом и концом в этих точках, найти их координаты и найти угол между полученными векторами. Угол между направляющими векторами и есть угол между соответствующими прямыми.

Пусть $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}, \vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ - направляющие векторы прямых a и b. Тогда косинус острого угла между прямыми a и b определяется по формуле:

$$cos(\vec{a}\hat{,}\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Пример 5

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми D_1C и BC_1.

Решение

1. Выбираем в пространстве систему координат так, чтобы т. A совпала с началом координат; ось x - с прямой AB; ось y - с прямой AD; ось z - с прямой AA_1; единичный отрезок был равен длине ребра куба.

2. Находим координаты необходимых точек:

$D_1(0;1;1);\ C(1;1;0); B(1;0;0);\ C_1(1;1;1).$

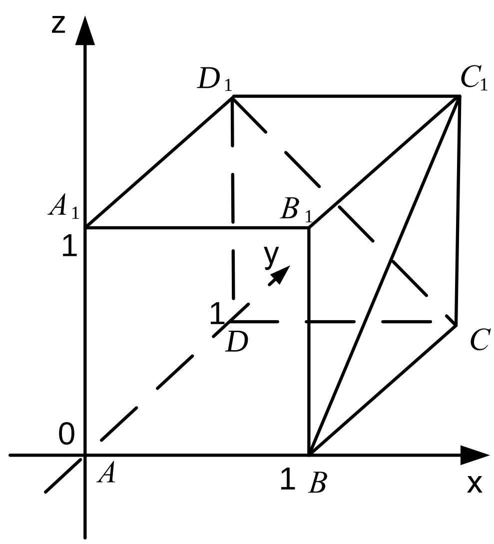


Рис. 23

3. Находим координаты векторов $\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$:

$\overrightarrow{CD_1}\{0-1; 1-1; 1-0\};\ \overrightarrow{BC_1}\{1-1; 1-0; 1-0\};$

$\overrightarrow{CD_1}\{-1; 0; 1\}; \overrightarrow{BC_1}\{0; 1; 1\}.$

$$cos(\overrightarrow{CD_1}\hat{,}\overrightarrow{BC_1}) = \frac{-1\cdot0+0\cdot1+1\cdot1}{\sqrt{1+0+1}\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{2}.$$

4. Получаем, что $(\overrightarrow{CD_1}\hat{,}\overrightarrow{BC_1}) = (CD_1\hat{,}BC_1) = 60^{\circ}$.

Ответ: 60°.

2) Нахождение угла между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость. В качестве угла между прямой и плоскостью мы выбираем острый угол. Если прямая параллельна плоскости, значит, угол между прямой и плоскостью равен нулю. Пусть $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ - направляющий вектор прямой a. Плоскость α задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор $\vec{n}\{A;\ B;\ C\}$ – вектор нормали к плоскости.

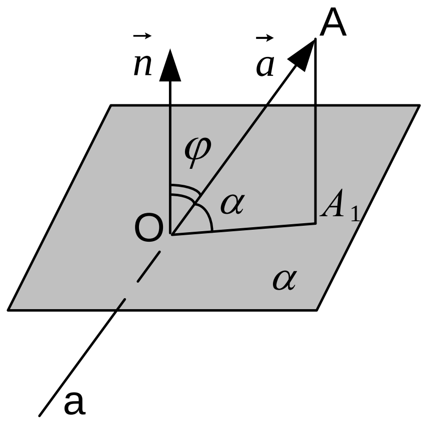


Рис. 24

Тогда вектор между прямой a и плоскостью α равен углу между прямой a (OA) и её проекцией на плоскость α (OA_1): $(\widehat{a,\alpha}) = \angle AOA_1 = \alpha$. $\alpha = 90^{\circ} - \varphi$, где $\varphi = (\widehat{\vec{a},\hat{n}})$. С учётом того, что нас интересует острый угол, получаем, что

$$sin\alpha = \sin(90^{\circ} - \varphi) = |\cos\varphi| = |\cos(\widehat{\vec{a},\hat{n}})| =$$
$$= \frac{|x_1A + y_1B + z_1C|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример 6

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите синус угла между прямой АК и плоскостью SBC, где К – середина ребра SD.

Решение

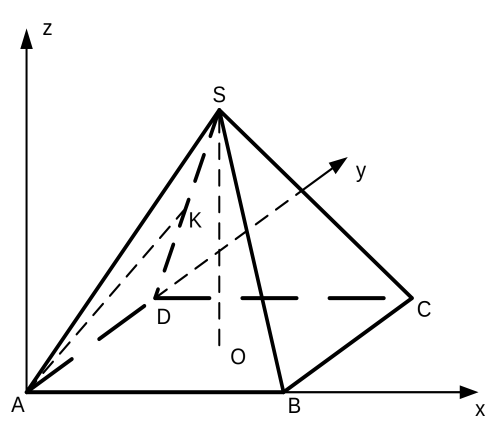


Рис 25

1. Выберем точку A как начало отсчета, т.е. она имеет координаты $(0; 0; 0)$. Ось x направим по AB, y – по AD, а z – по нормали к плоскости ABC, восстановленной в точке A (ось z параллельна высоте пирамиды - SO) .

2. Зная, что все ребра пирамиды равны 1, можем найти координаты необходимых точек: $A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C(1;1;0)$; $D(0;1;0)$; $S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Так как К – середина DS, то $K\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Получаем координаты вектора $\overrightarrow{AK}\left\{\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$.

3. Найдём уравнение плоскости SBC.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ \frac{1}{2}-1 & \frac{1}{2}-0 & \frac{\sqrt{2}}{2}-0 \\ 1-1 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-\frac{1}{2}z-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)=0;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}z-\frac{\sqrt{2}}{2}=0.$$

Следовательно, вектор нормали к плоскости SBC: $\overrightarrow{n}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{1}{2}\right\}$. Найдём синус угла между прямой АК и плоскостью SBC:

$$\operatorname{Sin}(\alpha)=\sin(90^{\circ}-\varphi)=\left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{n}}\right)\right|=\frac{|x_1A+y_1B+z_1C|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{8}+0+\frac{\sqrt{2}}{8}\right|}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+\frac{2}{16}}\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Это то, что и требовалось найти.

4. Получаем, что синус угла между прямой АК и плоскостью SBC равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

<u>3) Нахождение угла между плоскостями</u>

Очевидно, что угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям. Пусть плоскость α задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, вектор $\overrightarrow{n_1}\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ – вектор нормали к плоскости α; плоскость β задана уравнением $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, вектор $\overrightarrow{n_2}\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ – вектор нормали к плоскости β. Тогда косинус острого угла между плоскостями определяется по формуле:

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Пример 7

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре BB_1 отмечена точка E так, что $BE:EB_1 = 2:1$. Найдите угол между плоскостями ABC и AEC_1.

Решение

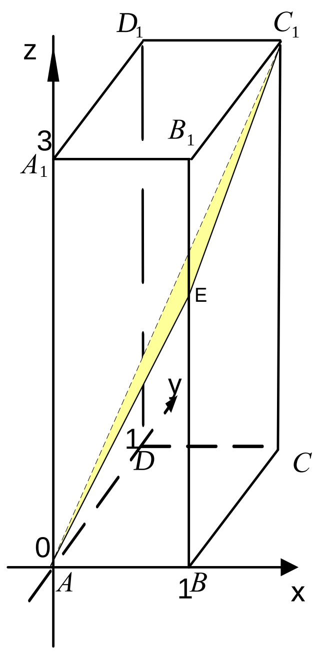


Рис 26

1. Выбираем в пространстве систему координат так, чтобы т. А совпала с началом координат; ось x - с прямой AB; ось y - с прямой AD; ось z - с прямой AA_1; единичный отрезок был равен длине ребра основания.

2. Находим координаты необходимых точек: $A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C(1;1;0)$; $E(1;0;2)$; $C_1(1;1;3)$.

3. Необходимо найти нормальные векторы плоскостей ABC и AEC_1.

Очевидно, что плоскость (ABC) перпендикулярна оси Oz, поэтому её нормальным вектором является любой вектор, параллельный оси Oz. Можно выбрать, например, вектор $\overrightarrow{n_1}\{0;0;1\}$. Для нахождения нормального вектора плоскости AEC_1 не обязательно знать её уравнение. Можно воспользоваться тем, что её нормальный вектор $\overrightarrow{n_2}\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ перпендикулярен любым векторам, лежащим в плоскости, в том числе и векторам $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}$. Находим их координаты: $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\{1-0; 0-0; 2-0\}$; $\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}\{1-0; 1-0; 3-0\}$. Получаем, что $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\{1; 0; 2\}$; $\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}\{1; 1; 3\}$. Получаем систему уравнений (из условий равенства нулю скалярного произведения перпендикулярных векторов):

$$\begin{cases} \mathrm{A_2} + 0\mathrm{B_2} + 2\mathrm{C_2} = 0, \\ \mathrm{A_2} + \mathrm{B_2} + 3\mathrm{C_2} = 0; \end{cases} \begin{cases} \mathrm{A_2} + 2C_2 = 0, \\ \mathrm{A_2} + \mathrm{B_2} + 3\mathrm{C_2} = 0. \end{cases}$$

Так как вектор нормали совершенно произвольный, придадим одной из переменных произвольное значение, например, положим $\mathrm{A_2}$=2. Тогда система принимает вид: $\begin{cases} 2 + 2C_2 = 0, \\ 2 + \mathrm{B_2} + 3\mathrm{C_2} = 0. \end{cases}$ Решая полученную систему, получаем, что $\mathrm{B_2} = 1;\ \mathrm{C_2} = -1$. Тогда $\overrightarrow{n_2}\{2; 1; -1\}$.

Косинус угла между плоскостями ABC и $\mathrm{AEC_1}$ равен косинусу угла между их нормальными векторами:

$$cos\alpha = \frac{|0\cdot2+0\cdot1+1(-1)|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

4. Получаем, что угол между плоскостями ABC и $\mathrm{AEC_1}$ равен $arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

<u>4) Нахождение расстояния от точки до плоскости</u>

Пусть $\mathrm{M_0}(\mathrm{x_0};\ \mathrm{y_0};\ z_0)$ – данная точка, не принадлежащая плоскости α, заданной уравнением $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C}z + D = 0$. Пусть $\mathrm{M_1}(\mathrm{x_1};\ \mathrm{y_1};\ z_1)$ – проекция точки $\mathrm{M_0}$ на плоскость α. Так как точка $\mathrm{M_1}$ лежит в плоскости α, её координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости:

$$\mathrm{A_1x} + \mathrm{B_1y} + \mathrm{C_1}z + D_1 = 0.$$

Вектор $\overrightarrow{\mathrm{M_0M_1}}$, как и вектор нормали $\vec{n}\{A; B; C\}$, перпендикулярен плоскости α, поэтому $\vec{n} \parallel \overrightarrow{\mathrm{M_0M_1}}$. Тогда существует такое число k, что $\overrightarrow{\mathrm{M_0M_1}} = k\vec{n}$. В координатном виде последнее равенство имеет вид:

$\{\mathrm{x_1} - \mathrm{x_0};\ \mathrm{y_1} - \mathrm{y_0};\ z_1 - z_0\} = k\{A; B; C\}$.

Получаем: $x_1 - x_0 = kA;\ y_1 - y_0 = kB;\ z_1 - z_0 = kC$.

Искомое расстояние от точки M_0 до плоскости α равно длине вектора $|\overrightarrow{M_0M_1}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} =$
$\sqrt{(kA)^2 + (kB)^2 + (kC)^2} = |k|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.
Из соотношений $x_1 - x_0 = kA;\ y_1 - y_0 = kB;\ z_1 - z_0 = kC$, выражаем координаты точки M_1: $x_1 = x_0 + kA;\ y_1 = y_0 + kB;\ z_1 = z_0 + kC$.
Подставляем эти координаты в уравнение плоскости α:

$$A(x_0 + kA) + B(y_0 + kB) + C(z_0 + kC) + D = 0.$$

Выражаем k из этого соотношения: $k = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$. Тогда

$$h = |\overrightarrow{M_0M_1}| = |k|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 8

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 3. Найдите расстояние от точки B до плоскости SEA.

Решение

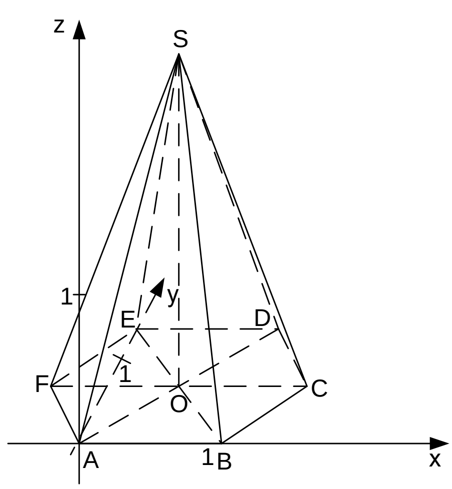


Рис 27

1. Выбираем в пространстве систему координат так, чтобы т. А совпала с началом координат; ось x - с прямой AB; ось y – с прямой, проходящей через точку А в плоскости ABC перпендикулярно прямой AB; ось z – с прямой, проходящей через точку А перпендикулярно плоскости ABC; единичный отрезок был равен длине стороны основания пирамиды.

2. Находим координаты необходимых точек: $A(0;0;0); B(1;0;0)$. Координату y точки E можно найти по теореме косинусов из ΔAEF:

$$AE^2 = AF^2 + FE^2 - 2 \cdot AF \cdot FE \cdot cos\angle F;$$

$$AE^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot cos120^\circ;$$

$$AE = \sqrt{3}.$$

Получаем, что E$(0; \sqrt{3}; 0)$. Из ΔAOS по теореме Пифагора

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Тогда координаты точки $S\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

3. Найдём уравнение плоскости AES:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} & z \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0;$$

$$x\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} + 0 + 0 - z\sqrt{3}\frac{1}{2} - 0 - 0 = 0;$$

$$2\sqrt{2}x - \frac{1}{2}z = 0;$$

$$4\sqrt{2}x - z = 0.$$

Находим расстояние от точки В до плоскости SEA:

$$h = \frac{\left|4\sqrt{2} \cdot 1 - 0\right|}{\sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{33}} = \frac{4\sqrt{66}}{33}.$$

4. Получаем, что расстояние от точки В до плоскости SEA равно $\frac{4\sqrt{66}}{33}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{66}}{33}$.

5) Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

Скрещивающиеся прямые – это прямые, не лежащие в одной плоскости. Расстояние между скрещивающимися прямыми можно определить как расстояние между ближайшими точками этих прямых.

Основные способы решения задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми:

•нахождение длины общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых, т.е. отрезка с концами на этих прямых и перпендикулярного каждой из этих прямых;

•нахождение расстояния от одной из скрещивающихся прямых до параллельной ей плоскости, проходящей через другую прямую;

•нахождение расстояния между двумя параллельными плоскостями, проходящими через заданные скрещивающиеся прямые;

•нахождение расстояния от точки, являющейся проекцией одной из скрещивающихся прямых, на перпендикулярную ей плоскость (так называемый "экран") до проекции другой прямой на ту же самую плоскость.

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми координатно-векторным методом обычно сводится к нахождению расстояния от точки одной прямой до плоскости, содержащей вторую прямую и параллельной первой прямой.

Пример 9

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом. Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если AC=6, BC=8.

Решение

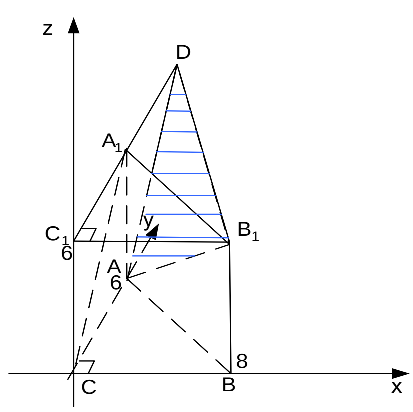


Рис 28

1. Выбираем в пространстве систему координат так, чтобы т. C совпала с началом координат; ось x - с прямой CB; ось y – с прямой AC; ось z – с прямой CC_1; единичный отрезок был равен $\frac{1}{6}AC = \frac{1}{8}CB$.

2. Находим координаты необходимых точек, учитывая, что грань ACC_1A_1 является квадратом: $A(0;6;0)$; $B_1(8;0;6)$; $C(0;0;0)$; $A_1(0;6;6)$.

3. Строим прямую $AD \parallel CA_1, AD = CA_1$. Тогда A_1DAC - параллелограмм, точка D имеет координаты: $D(0;12;6)$. Так как $AD \parallel CA_1$, то $CA_1 \parallel (DB_1A)$ по признаку параллельности прямой и плоскости. Следовательно, чтобы найти расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, достаточно найти расстояние между прямой CA_1 и плоскостью (DB_1A). Напишем уравнение плоскости DB_1A:

$$\begin{vmatrix} x & y-6 & z \\ 0 & 12-6 & 6-0 \\ 8-0 & 0-6 & 6-0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y-6 & z \\ 0 & 6 & 6 \\ 8 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$36x + 48(y-6) - 48z + 36x = 0;$$

$$36x + 48y - 288 - 48z + 36x = 0;$$

$$72x + 48y - 48z - 288 = 0;$$

$$3x + 2y - 2z - 12 = 0.$$

Находим расстояние от любой точки прямой CA_1 до плоскости (DB_1A), например, от точки C: $h = \frac{|3\cdot 0 + 2\cdot 0 - 2\cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}} = \frac{12}{\sqrt{17}} = \frac{12\sqrt{17}}{17}$.

4. Получаем, что расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 равно $\frac{12\sqrt{17}}{17}$.

Ответ: $\frac{12\sqrt{17}}{17}$.

6) Нахождение расстояния между параллельными плоскостями

Все точки одной из параллельных плоскостей находятся на одинаковом расстоянии от другой плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями – это расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями координатно-векторным методом обычно находят следующими способами:

1 способ: находим расстояние от точки, принадлежащей одной плоскости до второй плоскости.

2 способ: пусть параллельные плоскости заданы уравнениями:

α: $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C}z + D_1 = 0$; β: $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C}z + D_2 = 0$.

Тогда расстояние между ними определяется по формуле: $h = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Докажем эту формулу. Пусть точка $\mathrm{M}_1(\mathrm{x}_1;\ \mathrm{y}_1;\ z_1) \in \alpha$. Тогда её координаты удовлетворяют уравнению плоскости, то есть справедливо равенство: $\mathrm{Ax}_1 + \mathrm{By}_1 + \mathrm{C}z_1 + D_1 = 0$. Расстояние от точки M_1 до плоскости β вычисляется по формуле: $h = \frac{|\mathrm{Ax}_1+\mathrm{By}_1+\mathrm{C}z_1+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Из равенства $\mathrm{Ax}_1 + \mathrm{By}_1 + \mathrm{C}z_1 + D_1 = 0$ получаем, что $\mathrm{Ax}_1 + \mathrm{By}_1 + \mathrm{C}z_1 = -D_1$, подставляем данное выражение в формулу расстояния: $h = \frac{|-D_1+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Формула доказана.

Пример 10

Найдите расстояние между плоскостями сечений куба PRS и NKM, ребро которого равно 30, где $\frac{DN}{NC} = \frac{A_1P}{PB_1} = 1$, $\frac{B_1S}{SB} = \frac{DM}{MD_1} = \frac{1}{4}$, $\frac{B_1R}{RC_1} = \frac{DK}{KA} = \frac{1}{5}$.

Решение

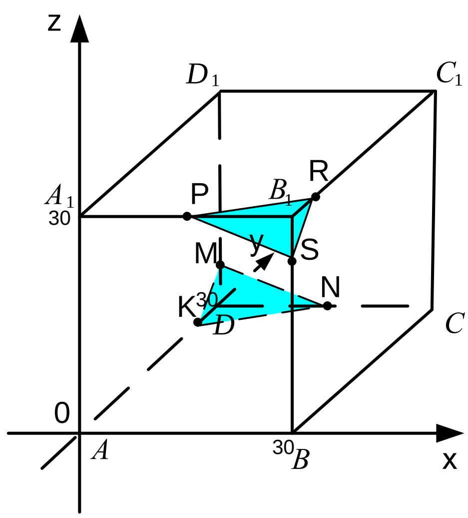


Рис 29

1. Выбираем в пространстве систему координат так, чтобы т. А совпала с началом координат; ось x - с прямой AB; ось y – с прямой AD; ось z – с прямой AA_1; единичный отрезок был равен $\frac{1}{30}$ ребра куба.

2. Находим координаты необходимых точек, с учётом того, что ребро куба равно 30, $\frac{DN}{NC} = \frac{A_1P}{PB_1} = 1$, $\frac{B_1S}{SB} = \frac{DM}{MD_1} = \frac{1}{4}$, $\frac{B_1R}{RC_1} = \frac{DK}{KA} = \frac{1}{5}$: $\mathrm{P}(15;0;30); R(30;5;30); \mathrm{S}(30;0;24);\ \mathrm{N}(15;30;0); \mathrm{K}(0;25;0);\ \mathrm{M}(0;30;6)$.

3. Найдём уравнения плоскостей (PRS) и (NKM).

$$\text{PRS:} \begin{vmatrix} \mathrm{x}-15 & \mathrm{y} & z-30 \\ 30-15 & 5-0 & 30-30 \\ 30-15 & 0 & 24-30 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x}-15 & \mathrm{y} & z-30 \\ 15 & 5 & 0 \\ 15 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-30(\mathrm{x}-15) - 75(z-30) + 90\mathrm{y} = 0;$$

$$-30\mathrm{x} + 450 - 75z + 2250 + 90\mathrm{y} = 0;$$

$$-30\mathrm{x} + 90\mathrm{y} - 75z + 2700 = 0;$$

$$2\mathrm{x} - 6\mathrm{y} + 5z - 180 = 0.$$

$$\text{NKM:} \begin{vmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y}-25 & z \\ 15-0 & 30-25 & 0 \\ 0 & 30-25 & 6-0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y}-25 & z \\ 15 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$30\mathrm{x} + 75z - 90(\mathrm{y}-25) = 0;$$

$$30\mathrm{x} + 75z - 90\mathrm{y} + 2250 = 0;$$

$$2\mathrm{x} - 6\mathrm{y} + 5z + 150 = 0.$$

Из полученных уравнений видно, что плоскости (PRS) и (NKM) имеют общий вектор нормали $\vec{n}\{2;-6;5\}$, следовательно, данные плоскости параллельны. Найдём расстояние между ними: $h = \frac{|150-(-180)|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+5^2}} = \frac{330}{\sqrt{65}} = \frac{330\sqrt{65}}{65} = \frac{66\sqrt{65}}{13}$.

4. Получаем, что расстояние между плоскостями сечений куба PRS и NKM равно $\frac{66\sqrt{65}}{13}$.

Ответ: $\frac{66\sqrt{65}}{13}$.

7) Нахождение расстояния от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на эту прямую. Если найти основание перпендикуляра легко, то остаётся вычислить расстояние между двумя точками. Но чаще всего нахождение координат основания перпендикуляра представляет сложность, поэтому нахождение расстояния от точки до прямой координатно-векторным методом сводится к вычислению высоты треугольника, вершинами которого являются концы отрезка, лежащего на прямой, и заданная точка. Рассмотрим вспомогательную задачу. В произвольном треугольнике ABC, заданном координатами своих вершин, найти расстояние от точки B до прямой, содержащей сторону AC.

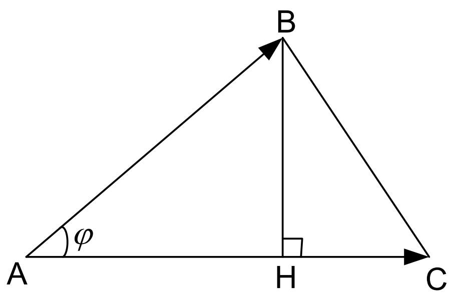


Рис 30

Для решения данной задачи можно рассмотреть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти их координаты и косинус угла между ними: $cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||AC|}$. Зная косинус, находим синус $\angle BAC$: $sin\varphi = \sqrt{1 - cos^2\varphi}$. Затем из ΔABH получаем: $BH = |\overrightarrow{AB}| \cdot sin\varphi$.

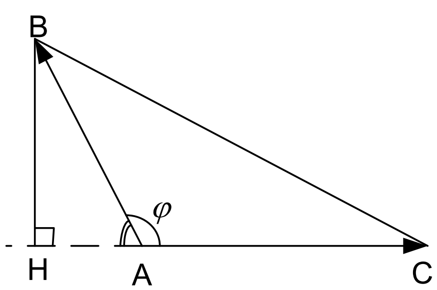


Рис 31

Если $\angle BAC$ тупой, то после нахождения синуса $\angle BAC$, находим $sin\angle BAH = sin(180^{\circ} - \angle BAC)$, а затем из ΔABH получаем: $BH = |\overrightarrow{AB}| \cdot sin\angle BAH$. Существуют и другие способы решения данной задачи (например, найти $sin\angle BCH$ и выразить BH из ΔCBH).

Можно также воспользоваться формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2}AC \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{2S}{AC}$, вычислив площадь по формуле Герона.

Иногда данную задачу сводят к нахождению расстояния от прямой, на которой лежит заданная точка (В), до параллельной ей плоскости, в которой лежит заданная прямая (АС).

Пример 11

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 найдите расстояние от точки А до прямой PQ, где P и Q – середины соответственно рёбер $\mathrm{A_1B_1}$ и BC.

Решение

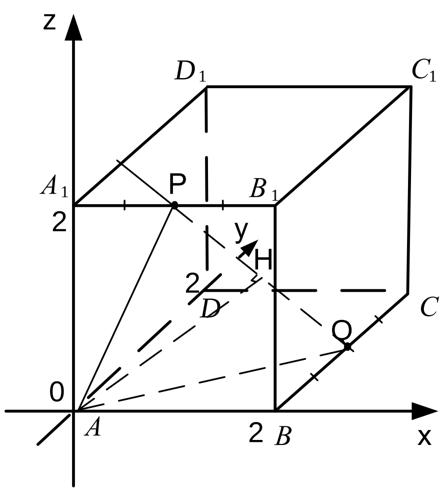


Рис 32

1. Выбираем в пространстве систему координат так, чтобы т. А совпала с началом координат; ось x - с прямой AB; ось y – с прямой AD; ось z – с прямой AA_1; единичный отрезок был равен $\frac{1}{2}$ ребра куба.

2. Находим координаты необходимых точек: $\mathrm{A}(0;0;0), \mathrm{P}(1;0;2), Q(2;1;0)$.

3. По формуле расстояния между точками получаем:

$$\mathrm{A}Q=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5};$$

$$\mathrm{AP}=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5};$$

$$\mathrm{P}Q=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{6}.$$

Так как $AQ=\mathrm{AP}$, то $\Delta\mathrm{AP}Q$-равнобедренный с основанием $\mathrm{P}Q$. Тогда расстояние от А до PQ равно длине высоты АН. Так как высота АН проведена к основанию равнобедренного треугольника, то она является медианой, следовательно, Н – середина PQ. Находим координаты точки Н: $\mathrm{H}\left(\frac{1+2}{2};\ \frac{0+1}{2};\ \frac{2+0}{2}\right)$; $\mathrm{H}(1{,}5;0{,}5;1)$. Тогда

$$\mathrm{AH}=\sqrt{(1{,}5-0)^2+(0{,}5-0)^2+(1-0)^2}=$$

$$= \sqrt{2{,}25 + 0{,}25 + 1} = \sqrt{3{,}5} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

4. Получаем, что расстояние от точки A до прямой PQ равно $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Пример 12

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 3, точка N – середина ребра AC, точка O – центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 2:1, считая от вершины пирамиды. Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

Решение

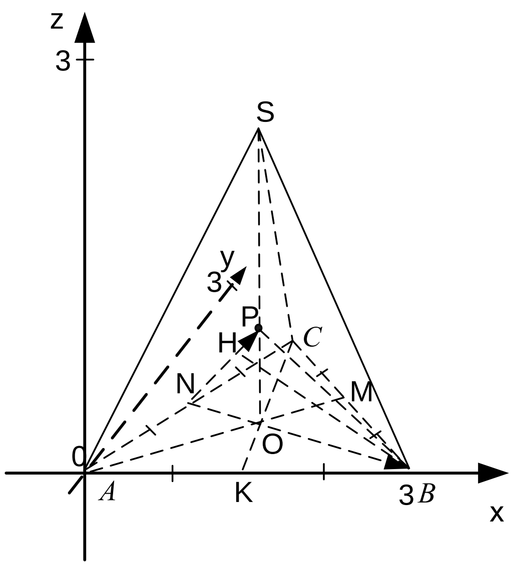


Рис 33

1. Выбираем в пространстве систему координат так, чтобы т. A совпала с началом координат; ось x - с прямой AB; ось y – с прямой, проходящей через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AB; ось z – с прямой, проходящая через точку A перпендикулярно плоскости ABC; единичный отрезок был равен $\frac{1}{3}$ ребра пирамиды.

2. Находим координаты необходимых точек: $\text{A}(0; 0; 0); \text{B}(3; 0; 0)$. Пусть M – середина CB, K-середина AB. Так как пирамида правильная, то ΔANC правильный, тогда CK, AM, BN – биссектрисы, медианы, высоты. По

теореме Пифагора из ΔANB

$$BN=\sqrt{AB^2-AN^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=AM=CK\ .$$

По свойству медиан $\frac{AO}{OM}=\frac{CO}{OK}=\frac{BO}{ON}=\frac{2}{1}$, тогда $BO=CO=AO=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$; $OK=OM=ON=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме Пифагора из ΔASO

$$SO=\sqrt{AS^2-AO^2}=\sqrt{3^2-\sqrt{3}^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6};\ OP=\frac{1}{3}SO=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Получаем, что $N\left(\frac{3}{4};\ \frac{3\sqrt{3}}{4};0\right);P\left(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

3. Пусть $BH\perp NP$. Рассмотрим ΔBNP. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{NB}$:

$$\overrightarrow{NP}=\left\{\frac{3}{2}-\frac{3}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4};\ \frac{\sqrt{6}}{3}-0\right\};\ \overrightarrow{NP}\left\{\frac{3}{4};\ -\frac{\sqrt{3}}{4};\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right\};$$

$$\overrightarrow{NB}=\left\{3-\frac{3}{4};\ 0-\frac{3\sqrt{3}}{4};\ 0\right\};\ \overrightarrow{NB}\left\{\frac{9}{4};\ -\frac{3\sqrt{3}}{4};\ 0\right\}.$$

Длины векторов: $\left|\overrightarrow{NP}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}+\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{51}}{6}$;

$$\left|\overrightarrow{NB}\right|=\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{81}{16}+\frac{27}{16}+0}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $cos\left(\overrightarrow{NP},\overrightarrow{NB}\right)=\frac{\left|\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{4}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot 0\right|}{\frac{\sqrt{51}}{6}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{27}{16}+\frac{9}{16}}{\frac{3\sqrt{17}}{4}}=\frac{3}{\sqrt{17}}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$. Зная косинус, можем найти синус данного острого угла: $\sin\left(\overrightarrow{NP},\overrightarrow{NB}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{17}}$.

Из ΔNBH $BH=NB\cdot sin\angle PNB=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{8}{17}}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{17}}=\frac{3\sqrt{102}}{17}$.

4. Получаем, что расстояние от точки B до прямой NP равно $\frac{3\sqrt{102}}{17}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{102}}{17}$.

6. Пример решения задачи ЕГЭ координатно-векторным методом

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.

Решение

1. Введём прямоугольную систему координат, так, чтобы т. A совпала с началом координат; ось x - с прямой AB; ось y – с прямой, проходящей через точку A в плоскости ABC перпендикулярно прямой AB; ось z – с прямой AA_1 единичные отрезки на осях были равны $\frac{1}{2}$ ребра призмы.

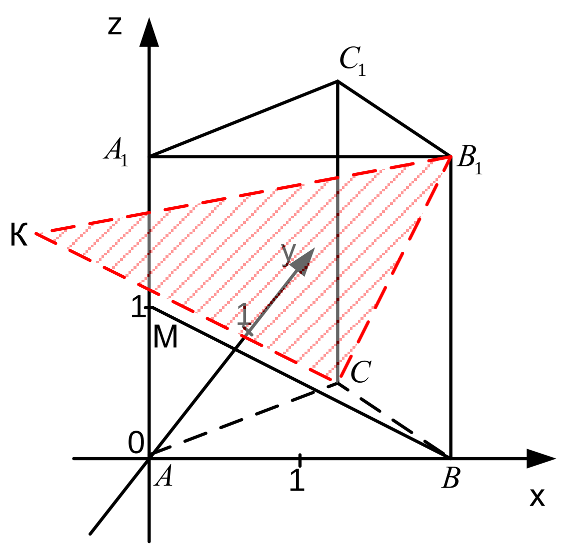


Рис. 34

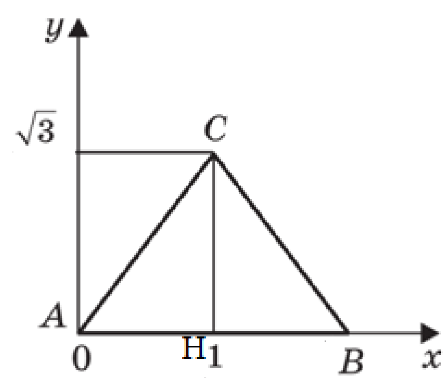


Рис. 35

2. Найдём координаты точек M, B, B_1, C: $M(0;0;1), B(2;0;0)$, $B_1(2;0;2), C\left(1;\sqrt{3};0\right)$ (для нахождения координаты y точки C строим высоту CH треугольника ABC, затем находим катет CH по теореме Пифагора: $\mathrm{CH} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$).

3. Векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{B_1C}$ - направляющие векторы прямых MB и B_1C. Найдём косинус угла между ними. Для этого сначала найдём координаты векторов: $\overrightarrow{MB}\{2-0; 0-0; 0-1\} = \{2; 0; -1\}$;

$\overrightarrow{B_1C}\{1-2; \sqrt{3}-0; 0-2\} = \{-1; \sqrt{3}; -2\}$. Тогда

$$cos\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{B_1C}\right) = \frac{2(-1)+0\sqrt{3}+(-1)(-2)}{\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2+(-2)^2}} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{B_1C}\right) = 90^\circ \Rightarrow$$

$\mathrm{MB} \perp \mathrm{B_1C}$, что и требовалось доказать.

4. Через точку C проведём прямую CK, параллельную MB (CK=MB). Тогда координаты точки K: $\mathrm{K}\left(-1; \sqrt{3}; 1\right)$. Так как CK ∥ MB, то по признаку параллельности прямой и плоскости $(\mathrm{CKB_1}) \parallel \mathrm{MB}$. Тогда для того, чтобы найти расстояние между прямыми MB и $B_1\mathrm{C}$, необходимо найти расстояние от любой точки прямой BM до плоскости $(\mathrm{CKB_1})$.

Найдём уравнение плоскости $(\mathrm{CKB_1})$. Воспользуемся формулой уравнения плоскости по трём точкам: если точки, задающие плоскость, имеют координаты $(\mathrm{x_1};\ \mathrm{y_1};\ z_1)$; $(\mathrm{x_2};\ \mathrm{y_2};\ z_2)$; $(\mathrm{x_3};\ \mathrm{y_3};\ z_3)$, то уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x}-\mathrm{x_1} & \mathrm{y}-\mathrm{y_1} & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для плоскости $(\mathrm{CKB_1})$ получаем:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{x}-2 & \mathrm{y}-0 & z-2 \\ 1-2 & \sqrt{3}-0 & 0-2 \\ -1-2 & \sqrt{3}-0 & 1-2 \end{vmatrix} = 0.$$

По правилу Саррюса для плоскости $(\mathrm{CKB_1})$ получаем:

$$-\sqrt{3}(\mathrm{x}-2) + 6y - \sqrt{3}(z-2) + 3\sqrt{3}(z-2) + 2\sqrt{3}(x-2) - y = 0;$$

$$-\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 6y - \sqrt{3}z + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}z - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} - y = 0;$$

$\sqrt{3}x + 5y + 2\sqrt{3}z - 6\sqrt{3} = 0$ – уравнение плоскости $(\mathrm{CKB_1})$.

Найдём расстояние от точки $B(2; 0; 0)$ до плоскости $(\mathrm{CKB_1})$. Расстояние от точки $(\mathrm{x_0};\ \mathrm{y_0};\ z_0)$ до плоскости $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C}z + D = 0$

вычисляется по формуле: $\rho = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Тогда $\rho = \frac{|\sqrt{3}\cdot 2+5\cdot 0+2\sqrt{3}\cdot 0-6\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+5^2+(2\sqrt{3})^2}} =$

$\frac{|-4\sqrt{3}|}{\sqrt{40}} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

7. Задачи для самостоятельного решения

1. Угол между прямыми

1.1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и AD_1. (60°)

1.2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1, где D_1 и E_1 - соответственно середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1. (0,7)

1.3. Точка O лежит на ребре DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка P является точкой пересечения диагоналей грани $ABCD$. $DO:DD_1 = 1:5$. Найдите косинус угла между прямой OP и прямой, содержащей диагональ куба, выходящую из вершины C. ($\frac{\sqrt{2}}{9}$)

1.4. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2, высота – 4. Точка E-середина отрезка CD, точка F-середина отрезка AD. Найдите угол между прямыми CF и B_1E. (90°)

1.5. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найдите угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB. (45°)

1.6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M – середина ребра AA_1. Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

1.7. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, рёбра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BF_1. (arccos$\frac{\sqrt{2}}{8}$)

2. Угол между прямой и плоскостью

2.1. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1. (30°)

2.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB и AA_1 равны 1, а ребро $AD = 2$. Точка Е-середина ребра B_1C_1. Найдите угол между прямой ВЕ и плоскостью AB_1C. (45°)

2.3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите синус угла между прямой ВЕ и плоскостью SAD, где Е – середина ребра SC. $(\frac{\sqrt{2}}{3})$

2.4. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямой AF и плоскостью $\mathrm{BCC_1}$. (60°)

2.5. В единичном кубе $\mathrm{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ найдите угол между прямой $\mathrm{A}D_1$ и плоскостью $\mathrm{A_1}EF$, где Е – середина ребра D_1C_1, а точка F лежит на ребре DD_1 так, что $D_1F = 2DF$. $(arcsin\frac{5\sqrt{58}}{58})$

2.6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой $\mathrm{B}D_1$ и плоскостью $\mathrm{BC_1}D$. $(arcsin\frac{1}{3})$

2.7. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между прямой $\mathrm{C}D_1$ и плоскостью $\mathrm{ABB_1}$. $(arcsin\frac{\sqrt{6}}{4})$

3. Угол между плоскостями

3.1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями $\mathrm{A}D_1\mathrm{E}$ и D_1FC, где Е и F – середины ребер $\mathrm{A_1B_1}$ и $\mathrm{B_1C_1}$ соответственно. (60°)

3.2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями $\mathrm{ACB_1}$ и $\mathrm{BA_1C_1}$. $(\frac{1}{7})$

3.3. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1 = 2:3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1. ($arccos\frac{\sqrt{14}}{14}$)

3.4. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1. (60°)

3.5. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1 = 2:1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1. ($arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$)

3.6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ отношение длины высоты к длине стороны основания равно $\sqrt{6}:4$. Найдите угол между плоскостями SBC и SDE. (60°)

3.7. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AA_1D и BC_1D. ($arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$)

4. Расстояние от точки до плоскости

4.1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BA_1D. ($\frac{\sqrt{3}}{3}$)

4.2. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1. ($\frac{\sqrt{2}}{4}$)

4.3. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости DEF_1. ($\frac{2\sqrt{21}}{7}$)

4.4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена диагональ B_1D. В каком отношении, считая от вершины B_1, плоскость A_1BC_1 делит диагональ B_1D? ($\frac{1}{2}$)

4.5. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AFF_1. ($\frac{\sqrt{3}}{2}$)

4.6. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в которой $AB = a; AA_1 = 2a$. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей основания $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости BDC_1. ($\frac{2a}{3}$)

4.7. Дана правильная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$, все рёбра которой равны 1. Докажите, что высота пирамиды SO равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. <u>Расстояние между скрещивающимися прямыми</u>

5.1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC. ($\frac{\sqrt{6}}{3}$)

5.2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1. ($\frac{\sqrt{3}}{3}$)

5.3. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром, равным a, точки M и K – середины рёбер соответственно BP и CP, точка O – центр основания ABC. Найдите расстояние между прямыми MK и OP. ($\frac{a\sqrt{3}}{12}$)

5.4. Вычислите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром a. ($\frac{\sqrt{3}}{3}a$)

5.5. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1. ($\frac{\sqrt{3}}{2}$)

5.6. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом. A) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны. B) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если AC=4, BC=7. ($\frac{14\sqrt{2}}{9}$)

5.7. В прямоугольном параллелепипеде с размерами a, b, h найдите расстояние между боковым ребром и не пересекающейся с ним диагональю параллелепипеда. ($\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

6. Расстояние между параллельными плоскостями

6.1. Найдите расстояние между плоскостями сечений куба PRS и NKM, ребро которого равно 12, где $\frac{DN}{NC}=\frac{A_1P}{PB_1}=1$, $\frac{B_1S}{SB}=\frac{DM}{MD_1}=\frac{1}{3}$, $\frac{B_1R}{RC_1}=\frac{DK}{KA}=\frac{1}{4}$. ($\frac{36\sqrt{5}}{5}$)

6.2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 , если AB=a. ($\frac{\sqrt{3}}{3}$a)

6.3. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точки M и N – середины рёбер SD и SE соответственно. Найдите расстояние между плоскостями MNC и SAB, если сторона основания пирамиды равна 1, а боковое ребро равно 2. ($\sqrt{\frac{3}{5}}$)

7. Расстояние от точки до прямой

7.1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1. ($\frac{\sqrt{6}}{3}$)

7.2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG, где G – середина ребра SC. ($\frac{\sqrt{42}}{4}$)

7.3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N – середина ребра AC, точка O – центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3:1, считая от вершины пирамиды. А) Докажите, что $NP \perp BS$. В) Найдите расстояние от точки B до прямой NP. (2)

7.4. Найдите расстояние от вершины D основания правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до диагонали A_1C, если сторона основания равна 12, а боковое ребро призмы $4\sqrt{7}$. (9,6)

7.5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой PQ, где P и Q – середины соответственно рёбер A_1B_1 и BC. ($\frac{\sqrt{14}}{4}$)

8. Список литературы

1. Атанасян Л.С., Киселева Л.С., Позняк Э.Г. Геометрия. 10-11 классы. Учебник. Базовый и углубленный уровни. ФГОС. - М.: Просвещение, 2020. - 287 с.

2. Беликова И. Задание С2: решаем методом координат // Математика. – 2010. - № 20. – С. 2-10.

3. Борзенко Е.К., Корнева И.Г. Решение стереометрических задач: Методические рекомендации. – Бийск: РИО БПГУ им. В.М. Шукшина, 2005. – 60 с.

4. Габович И., Горнштейн П. Вооружившись методом координат // Квант. – 2009. - №11. – с. 42 – 47.

5. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат. – М.: МЦНМО, 2009. – 184 с.

6. Игошин В.И. Аналитическая геометрия. - Саратов: Наука, 2007.

7. Кулабухов С.Ю. Математика. Подготовка к ЕГЭ. Решение задач по стереометрии методом координат. - Ростов-на-Дону: Легион, 2013. – 32 с.

8. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. "Математика. Подготовка к ЕГЭ. Многогранники: типы задач и методы их решения, Ростов-на-Дону, Легион, 2014. – 89 с.

9. Смирнова И.М., Смирнов В.А.. Геометрия. Расстояния и углы в пространстве. – М.: Экзамен, 2009. – 141 с.

10. Смирнова И.М., Смирнов В.А.. Геометрия. Объемы и площади поверхностей пространственных фигур. – М.: Экзамен, 2009 – 160 с.

Учебно-методическое пособие

Бирюлина Елена Владимировна

Решение стереометрической задачи ЕГЭ координатно-векторным методом

Отпечатано с компьютерного набора
в издательстве ИП Усова И.Н.

Подписано в печать 11.01.2022. Бумага офсетная. Формат 60x84/16.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8.
Тираж 1000 экз. Заказ № 1.

Отпечатано в типографии ИП Усова И.Н.
г. Брянск, пер. Урицкого, 18
Тел.: (4832) 74-47-86